

УДК 517.54
МРНТИ 27.23.25

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-3-176-190>

¹Майер Ф.Ф.,

канд. физ.-мат. наук, профессор,
ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
e-mail: maiyer@mail.ru

¹Тастанов М.Г.,

канд. физ.-мат. наук, профессор,
ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru

^{1*}Утемисова А.А.,

канд. пед. наук, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,
*e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹Ысмағұл Р.С.,

канд. физ.-мат. наук, профессор,
ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,
e-mail: ismagulr@mail.ru

¹НАО «Костанайский региональный университет имени Ахмета Байтурсынулы»,
г. Костанай 110000, Казахстан

ОБ ОБОБЩЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫПУКЛЫХ В НАПРАВЛЕНИИ И ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

В статье М.О. Рида (M.O. Reade, Duke Math. Journal, 1956) с помощью условия $|\arg(f'(z)/g'(z))| \leq \frac{\gamma\pi}{2}$, где $g(z)$ – выпуклая функция, $0 \leq \gamma \leq 1$, введен класс функций, почти выпуклых порядка γ . В нашей статье вводится подкласс класса почти выпуклых порядка γ функций, удовлетворяющих условию $|\arg[(1 - \lambda z^n)^\alpha f'(z)]| \leq \gamma\pi/2$, который при различных значениях параметров дает ряд известных подклассов однолистных функций. На базе данного подкласса построен класс почти звездообразных функций, содержащий целый ряд подклассов, активно исследуемых многими авторами в последние годы, а также классический класс типично вещественных функций. Для данных классов найдены, соответственно, теоремы искажения (роста) и радиусы выпуклости (звездообразности). Также рассмотрен случай, когда исследуемые функции имеют пропуски членов в разложении в ряд. Полученные результаты являются точными и не только обобщают ранее известные результаты, но и раскрывают свойства ряда новых подклассов однолистных функций.

Ключевые слова: почти выпуклые функции, почти звездообразные функции, типично вещественные функции, оценки роста, оценки искажения, радиусы выпуклости, радиусы звездообразности.

Введение

Исследованию различных подклассов однолистных функций посвящен целый ряд статей, включая и опубликованные в последние три года. Основными направлениями исследований являются оценка коэффициентов и нахождение теорем роста, покрытия, искажения различных радиусных констант.

В статье рассматривается достаточно широкий класс однолистных функций, включающий ряд известных подклассов почти выпуклых функций. На базе данного класса построен

класс почти звездообразных функций, содержащий целый ряд подклассов, активно исследуемых в последние годы, а также класс типично вещественных функций.

Для данных классов найдены, соответственно, теоремы роста (искажения) и радиусы выпуклости (звездообразности). Рассмотрен случай, когда исследуемые функции имеют пропуски членов в разложении в ряд. Полученные результаты являются точными и не только обобщают ранее известные результаты, но и раскрывают свойства ряда новых подклассов однолистных функций.

Материалы и методы

Основным методом исследования статьи является достаточно простой в применении и в то же время эффективный метод подчиненности аналитических функций. Говорят, что аналитическая в единичном круге E функция $\varphi(z)$ подчинена функции $\varphi_0(z)$ и пишут $\varphi(z) < \varphi_0(z)$, если существует аналитическая в E функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям леммы Шварца, то есть, такая, что $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| \leq 1$ и такая, что $\varphi(z) = \varphi_0(\omega(z))$. В случае однолистной функции $\varphi_0(z)$ соотношение подчиненности означает, что $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$, откуда следует вложение замкнутых областей $\varphi(|z| \leq r) \subseteq \varphi_0(|z| \leq r)$ при любом r , $0 \leq r < 1$.

Основные положения

Обозначим через $\mathcal{N}_n$ класс аналитических в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z)$, разлагающихся в степенной ряд вида $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots$, $n \geq 1$, $z \in E$, и пусть $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1$. Также будем использовать следующие обозначения для известных подклассов класса $\mathcal{N}$: S – класс однолистных функций, K – класс почти выпуклых функций, S^* – звездообразных функций и S° – выпуклых функций $f(z)$. Информацию о классе однолистных функций и его подклассах можно получить в обзорной статье [1].

Функции классов S° , S^* и K обладают наглядными геометрическими свойствами [1, §2, 4]. При этом, $S^\circ \subset S^* \subset K \subset S$.

Следуя [1], приведем следующие определения.

Определение 1. Регулярная (то есть однозначная и дифференцируемая) в круге E функция $w = f(z)$ называется однолистной в круге E , если для любых $z_1, z_2 \in E$ из условия $z_1 \neq z_2$ следует, что $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Определение 2. Функция $w = f(z)$ называется выпуклой в круге E , если она отображает круг E на выпуклую область $f(E)$, то есть такую область, что для любых двух точек области $f(E)$ отрезок с концами в данных точках также целиком содержится в этой области.

Известно, что

$$f(z) \in S^\circ \Leftrightarrow 1 + \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq 0, \quad z \in E.$$

Определение 3. Функция $w = f(z)$ называется звездообразной в круге E , если она отображает круг E на звездообразную область $f(E)$, то есть такую область, что наряду с любой точкой $w \in f(E)$ и отрезок $[0, w]$ также целиком содержится в области $f(E)$.

Известно, что

$$f(z) \in S^* \Leftrightarrow \operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} \geq 0, \quad z \in E.$$

Определение 4. Регулярная в круге E функция $f(z)$ называется почти выпуклой в круге E , если существует выпуклая в E функция $g(z)$ такая, что выполняется условие

$$\operatorname{Re} \frac{f'(z)}{g'(z)} \geq 0, \quad z \in E.$$

Функции $f(z) \in K$ обладают тем свойством, что внешность области $f(E)$ можно полностью покрыть семейством непересекающихся лучей с вершинами на границе области $f(E)$, имеющих с границей области $f(E)$ либо одну общую точку, либо общий связный отрезок луча, либо весь луч.

Также нам потребуются следующие подклассы классов S^* и S^o :

$$S_\beta^* = \left\{ f(z): \operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} \geq \beta \right\} \text{ и } S_\beta^o = \left\{ f(z): 1 + \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq \beta \right\},$$

где $0 \leq \beta < 1$.

Обзор литературы

В статье [2] с помощью условия

$$\left| \arg \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| \leq \frac{\gamma\pi}{2}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad z \in E, \quad (1)$$

введен класс $K(\gamma) \subset K = K(1)$ функций $f(z)$, почти выпуклых порядка γ . Его подклассами являются классы $C_i(\gamma)$, $i = 1, 2, 3$, функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$, удовлетворяющих, соответственно, условиям

$$C_1(\gamma): |\arg [(1 - z^2)f'(z)]| \leq \frac{\gamma\pi}{2}, \quad (2)$$

$$C_2(\gamma): |\arg [(1 - z)^2 f'(z)]| \leq \frac{\gamma\pi}{2}, \quad (3)$$

$$C_3(\gamma): |\arg [(1 - z) f'(z)]| \leq \frac{\gamma\pi}{2}, \quad (4)$$

построенные на основе условия (1) с помощью выпуклых функций

$$g_1(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad g_2(z) = \frac{z}{1-z}, \quad g_3(z) = -\ln(1-z).$$

Толчок к исследованию классов (2)–(4), а также классов $C_i := C_i(1)$, $i = 1, 2, 3$, дала статья [3], в которой исследовались свойства функций класса $C_1 = \{f(z) \in \mathcal{N}: \operatorname{Re} [(1 - z^2)f'(z)] \geq 0\}$.

В статье [4] изучаются геометрические свойства функций класса $\mathcal{CV}_{\alpha, \beta}^-$, заданного условием $-\frac{\beta\pi}{2} \leq \arg [ie^{i\delta}(1 - e^{-i\delta}z)^2 f'(z)] \leq \frac{\alpha\pi}{2}$, $\alpha, \beta \in [0; 1]$, обобщающего класс $C_2(\gamma)$. Из [3] следует, что для каждой функции $f(z) \in C_2(\gamma)$ область $f(E)$ (а также $\overline{\mathbb{C}} \setminus f(E)$) может быть покрыта углами величины $(1 - \gamma)\pi$ с вершинами в граничных точках области $f(E)$ и биссектрисами, имеющими положительное (отрицательное) направление действительной оси.

Одновременно с [4] в [5] изучался класс $C_1(\gamma)$ функций $f(z)$, выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси. В этом случае функции $f(z) \in C_1(\gamma)$ обладают тем свойством, что область $f(E)$ достижима извне углами величины $(1 - \gamma)\pi$ с биссектрисами, параллельными мнимой оси и уходящими в ∞ (вверх или вниз).

Обобщение класса $C_1(\gamma)$ в форме ограничения $|[(1 - \lambda z^2)f'(z)]^{1/\gamma} - a| \leq a$, рассматривалось в [6].

По аналогии с классом K , то есть с условием (1) при $\gamma = 1$, в [6] был введен класс CS^* почти звездообразных функций $F(z) \in \mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} \frac{F(z)}{G(z)} \geq 0, \text{ где } G(z) \in S^*, z \in E. \quad (5)$$

Подклассами класса CS^* являются классы функций $F(z)$, удовлетворяющих условиям

$$CS_1^*(\gamma): |\arg [(1 - z^2)F(z)/z]| \leq \frac{\gamma\pi}{2}, \quad (2')$$

$$CS_2^*(\gamma): |\arg [(1 - z)^2 F(z)/z]| \leq \frac{\gamma\pi}{2}, \quad (3')$$

$$CS_3^*(\gamma): |\arg [(1 - z) F(z)/z]| \leq \frac{\gamma\pi}{2}. \quad (4')$$

Нетрудно увидеть, что между классами $C_1(\gamma)$, $C_2(\gamma)$, $C_3(\gamma)$ и $CS_1^*(\gamma)$, $CS_2^*(\gamma)$, $CS_3^*(\gamma)$ имеется простая связь, которая устанавливается с помощью соотношения

$$f(z) \in C_i(\gamma) \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in CS_i^*(\gamma), i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Для более простого случая, когда $\gamma = 1$, классы $CS_i^* = CS_i^*(1)$, $i = 1, 2, 3$, а также аналогичные им классы $CS_4^* = \{F(z) \in \mathcal{N}: \operatorname{Re} (F(z)/z) \geq 0\}$ и $CS_5^* = \{F(z) \in \mathcal{N}: \operatorname{Re} (F(z)/(z + z^2/2)) \geq 0\}$ исследовались в статьях [7–12] с точки зрения оценки коэффициентов и нахождения радиусов звездообразности.

Класс CS_1^* является расширением класса T типично вещественных функций [13], так как функции класса T дополнительно к условию $\operatorname{Re} \{(1 - z^2)F(z)/z\} \geq 0$, $z \in E$, должны удовлетворять еще следующим условиям: $\operatorname{Im} F(z) = 0$ при $z \in (-1; 1)$ и $\operatorname{Im} F(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0$ в остальных точках круга E .

Отсюда следует, что $T \subset CS_1^* \subset CS^*$.

Статья [13] дала толчок целому ряду исследований типично вещественных функций (например, [14–15]) или их обобщений (например, [8, 12]).

Результаты и обсуждение

1. Класс $C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ почти выпуклых функций и обобщение класса типично-вещественных функций

Ниже по тексту будем считать, что $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$.

Определение 5. Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу $C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z) \in \mathcal{N}$ и удовлетворяет условию

$$|\arg [(1 - \lambda z^n)^\alpha f'(z)]| \leq \frac{\gamma\pi}{2}, \quad \lambda - 1 \leq \alpha\lambda n \leq \lambda + 1, \quad z \in E. \quad (7)$$

Если функция $f(z) \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$, то функция $f(z) \in K(\gamma)$, поскольку удовлетворяют условию (1) с выпуклой в E функцией

$$g(z) = \int_0^z \frac{dt}{(1 - \lambda t^n)^\alpha}.$$

Действительно, если $\alpha = 0$, то $g(z) = z \in S^0$. Если же $\alpha > 0$, то

$$\operatorname{Re} z \frac{g''(z)}{g'(z)} = \operatorname{Re} \frac{\alpha \lambda n z^n}{1 - \lambda z^n} \geq \min_{|t| < 1} \operatorname{Re} \frac{\alpha \lambda n t}{1 - \lambda t} = -\frac{\alpha \lambda n}{1 + \lambda} \geq -1 \quad (8)$$

при $0 \leq \alpha \lambda n \leq \lambda + 1$. Если же $\alpha < 0$, то аналогично неравенству (8) получаем, что $\operatorname{Re} z \frac{g''(z)}{g'(z)} \geq \frac{\alpha \lambda n}{1 - \lambda} \geq -1$ при $\alpha \lambda n \geq \lambda - 1$. То есть, $g(z) \in S^\circ$ при $\lambda - 1 \leq \alpha \lambda n \leq \lambda + 1$ и $C_n(\lambda, \alpha, \gamma) \subset K(\gamma)$.

Частными случаями класса $C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ являются классы функций $C_1(\gamma) = C_2(1, 1, \gamma)$, $C_2(\gamma) = C_1(1, 2, \gamma)$, $C_3(\gamma) = C_1(1, 1, \gamma)$, $\mathcal{R}(\gamma) = C_1(1, 0, \gamma)$, где $\mathcal{R} := \mathcal{R}(1)$ – класс функций с ограниченным вращением [16], который задается с помощью условия $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0$, $z \in E$.

Рассмотрим класс $T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ функций $F(z) \in \mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$$\left| \arg \left((1 - \lambda z^n)^\alpha \frac{F(z)}{z} \right) \right| \leq \frac{\gamma \pi}{2}, \quad \lambda - 1 \leq \alpha \lambda n \leq \lambda + 1, \quad z \in E. \quad (9)$$

При условии вещественности $F(z)$ в точках интервала $(-1; 1)$ при $n = 2$, $\lambda = \alpha = \gamma = 1$ класс $T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ преобразуется в класс T типично вещественных функций. Кроме того, $T_2(1, 1, \gamma) \subset T$ для всех $\gamma \in (0; 1]$.

Легко установить, что

$$f(z) \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma) \Leftrightarrow F(z) = z f'(z) \in T_n(\lambda, \alpha, \gamma). \quad (10)$$

Действительно, если $f(z) \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$, то по определению класса $C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ функция $f(z)$ удовлетворяет условию (7), то есть условию $|\arg [(1 - \lambda z^n)^\alpha f'(z)]| \leq \frac{\gamma \pi}{2}$. Тогда функция $F(z) = z f'(z)$, так как $f'(z) = \frac{F(z)}{z}$, будет удовлетворять условию $\left| \arg \left[(1 - \lambda z^n)^\alpha \frac{F(z)}{z} \right] \right| \leq \frac{\gamma \pi}{2}$ (9), а это по определению класса $T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ означает, что $F(z) \in T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$. То есть $f(z) \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma) \Rightarrow F(z) = z f'(z) \in T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$. Импликация в обратную сторону доказывается в обратном порядке.

2. Теоремы искажения в классе $C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$

Теорема 1. Пусть $f(z) \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1 - r^m}{1 + r^m} \right)^\gamma \frac{1}{(1 + \lambda r^n)^\alpha} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1 + r^m}{1 - r^m} \right)^\gamma \frac{1}{(1 - \lambda r^n)^\alpha} \quad \text{при } \alpha \geq 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{1 - r^m}{1 + r^m} \right)^\gamma \frac{1}{(1 - \lambda r^n)^\alpha} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1 + r^m}{1 - r^m} \right)^\gamma \frac{1}{(1 + \lambda r^n)^\alpha} \quad \text{при } \alpha < 0, \quad (12)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\alpha \lambda n z^n}{1 - \lambda z^n} \right| \leq \frac{2 \gamma m r^m}{1 - r^{2m}}, \quad (13)$$

где $m = 1$ при $f(z) \in \mathcal{N}$ и $m = n$ при $f(z) \in \mathcal{N}_n$.

Доказательство. Пусть $f(z) \in \mathcal{N}$. Условие (7) в форме подчиненности приобретает вид

$$\varphi(z) = (1 - \lambda z^n)^\alpha f'(z) \prec \varphi_0(z) = \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)^\gamma. \quad (14)$$

Поэтому при любом r , $0 \leq r < 1$, выполняется соотношение $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r)$, откуда вытекает неравенство

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\gamma} \leq |(1-\lambda z^n)^{\alpha} f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma}. \quad (15)$$

Пусть $\alpha \geq 0$. Поскольку в силу правой оценки (15) при $|z| = r$ выполняется неравенство

$$(1-\lambda r^n)^{\alpha} |f'(z)| \leq |(1-\lambda z^n)^{\alpha} f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma},$$

то отсюда вытекает правая оценка (11). Аналогично с помощью левой оценки (15) находим

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\gamma} \leq |(1-\lambda z^n)^{\alpha} f'(z)| \leq (1+\lambda r^n)^{\alpha} |f'(z)|,$$

откуда следует левая оценка (11).

Если $\alpha < 0$, то учитывая, что

$$(1+\lambda r^n)^{\alpha} \leq |(1-\lambda z^n)^{\alpha}| \leq (1-\lambda r^n)^{\alpha},$$

аналогично предыдущему находим оценку (12).

Перепишем условие (14) в виде

$$\Phi(z) = \alpha \ln(1-\lambda z^n) + \ln f'(z) < \Phi_0(z) = \gamma \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

Отсюда в силу подчиненности $\Phi(z) < \Phi_0(z)$ существует функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям леммы Шварца, такая, что $\Phi(z) = \gamma \ln \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}$. Поэтому $\Phi'(z) = \frac{2\gamma \omega'(z)}{1-\omega^2(z)}$ и с учетом неравенства [17, с. 323]

$$|\omega'(z)| \leq \frac{1-|\omega(z)|^2}{1-|z|^2}$$

окончательно получаем оценку (13)

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\alpha \lambda n z^n}{1-\lambda z^n} \right| = |z \Phi'(z)| \leq \frac{2\gamma |z| |\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} \leq \frac{2\gamma r}{1-r^2}.$$

Покажем, что оценки (11)–(13) улучшить нельзя.

Рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\gamma} \frac{dt}{(1-\lambda t^n)^{\alpha}} \in C_m(\lambda, \alpha, \gamma).$$

Для нее

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} - \frac{\alpha \lambda n z^n}{1-\lambda z^n} = \frac{2\gamma z}{1-z^2}$$

и поэтому при любом α , $\lambda - 1 \leq \alpha \lambda n \leq \lambda + 1$, в точке $z = r$ в оценке (13) достигается знак равенства.

1) Пусть $\alpha \geq 0$. Поскольку

$$f_0'(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1-\lambda z^n)^{\alpha}},$$

то при любом $n \in \mathbb{N}$ в правой оценке (11) для функции $f_0(z)$ в точке $z = r$ достигается знак равенства.

Если n – нечетное, то в левой оценке (11) для функции $f_0(z)$ в точке $z = -r$ также достигается знак равенства, поскольку

$$f'_0(-r) = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1+\lambda r^n)^{\alpha}}.$$

Для доказательства точности левой оценки (11) при четном n рассмотрим два случая.

а) $n = 2, 6, 10, \dots, 2(2k-1), \dots, k \in \mathbb{N}$. Тогда $i^n = -1$ и для $z = ir$ имеем $z^n = -r^n, iz = -r$. Поэтому для функции

$$f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{1+it}{1-it}\right)^{\gamma} \frac{dt}{(1-\lambda t^n)^{\alpha}} \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma) \quad (16)$$

в точке $z = ir$ получаем

$$f'_1(ir) = \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1-\lambda z^n)^{\alpha}} \Big|_{z=ir} = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1+\lambda r^n)^{\alpha}},$$

то есть в этом случае левую оценку (11) улучшить нельзя.

б) $n = 4, 8, 12, \dots, 4k, \dots, k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$f_2(z) = \int_0^z \left(\frac{1+\varepsilon^{-1}t}{1-\varepsilon^{-1}t}\right)^{\gamma} \frac{dt}{(1-\lambda t^n)^{\alpha}} \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma), \quad \varepsilon = i^{\frac{n+2}{n}}. \quad (17)$$

В этом случае $i^n = 1$ и для $z = -\varepsilon r$ получаем, что $z^n = -r^n, \varepsilon^{-1}z = -r$.

Поэтому

$$f'_2(-\varepsilon r) = \left(\frac{1+\varepsilon^{-1}z}{1-\varepsilon^{-1}z}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1-\lambda z^n)^{\alpha}} \Big|_{z=-\varepsilon r} = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1+\lambda r^n)^{\alpha}},$$

что доказывает неулучшаемость левой оценки (11) и в этом случае.

2) В случае $\alpha < 0$ доказательство проводится аналогично предыдущему. Для функции

$$f_3(z) = \int_0^z \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\gamma} \frac{dt}{(1-\lambda t^n)^{\alpha}} \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma) \quad (18)$$

при нечетном n в оценках (12) слева и справа достигаются знаки равенства, соответственно, в точках $z = r$ и $z = -r$. При четном n для функции $f_3(z)$ в левой оценке (12) знак равенств достигается в точке $z = r$.

Остается доказать точность правой оценки (12) при четном n .

Тогда при $n = 2(2k-1), k \in \mathbb{N}$, имеем $z^n = -r^n, iz = -r$, а для $n = 4k, k \in \mathbb{N}$, имеем $z^n = -r^n$, и для $\varepsilon_1 = i^{\frac{n-2}{n}}$ находим $\varepsilon_1 z = -r$. Поэтому для функций

$$f_4(z) = \int_0^z \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^{\gamma} \frac{dt}{(1-\lambda t^n)^{\alpha}}, f_5(z) = \int_0^z \left(\frac{1-\varepsilon_1 t}{1+\varepsilon_1 t}\right)^{\gamma} \frac{dt}{(1-\lambda t^n)^{\alpha}},$$

соответственно в точках $z = ir$ и $z = i\varepsilon_1^{-1}r$ получаем, что

$$f'_4(ir) = f'_5(i\varepsilon_1^{-1}r) = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma} \frac{1}{(1+\lambda r^n)^{\alpha}},$$

что доказывает неулучшаемость правой оценки (12) и в этом случае.

Пусть теперь $f(z) \in \mathcal{N}_n$. В этом случае доказательство полностью аналогично доказательству теоремы для случая, когда $f(z) \in \mathcal{N}$, с той лишь разницей, что функция $\varphi(z) = (1 - \lambda z^n)^\alpha f'(z)$ разлагается в ряд вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$. Поэтому в силу подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ с учетом усиленной леммы Шварца [17, с. 323] будет иметь место включение $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n)$, $0 \leq r < 1$, то есть при $|z| = r$ вместо (15) будет выполняться неравенство

$$\left(\frac{1-r^n}{1+r^n}\right)^{\gamma} \leq |(1-\lambda z^n)^{\alpha} f'(z)| \leq \left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\gamma}, \quad (15')$$

откуда и вытекают оценки (11)–(12) для случая $m = n$.

Для доказательства оценки (13) с учетом разложения в ряд функции $\Phi(z) = \alpha \ln(1 - \lambda z^n) + \ln f'(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \dots$ и применяя оценку

$$|\omega'(z)| \leq \frac{n|z|^{n-1}}{1-|z|^{2n}} (1 - |\omega(z)|^2)$$

из теоремы Голузина Г.М. [17, с. 323], получаем (13) для случая $m = n$.

Теорема 1 доказана.

В частных случаях из теоремы 1 вытекают оценки $|f'(z)|$ и $\left|z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right|$ для классов $C_1(\gamma)$, $C_2(\gamma)$, $C_3(\gamma)$, $\mathcal{R}(\gamma)$ и при $\gamma = 1$ – для классов C_1 , C_2 , C_3 и $\mathcal{R}$.

Оценки для класса $C_1(\gamma)$ при $m = 1$ и при $m = 2$ получены ранее в [5], а при $m = \gamma = 1$ оценка $|f'(z)|$ для C_1 – в [3]. Оценка $|f'(z)|$ для класса $\mathcal{R}$ ранее получена в [18].

3. Радиус выпуклости класса $C_m(\lambda, \alpha, \gamma)$ и его подклассов

Оценка (12) позволяет найти точный радиус выпуклости порядка β класса $C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$.

Теорема 2. Точный радиус $r_0(\beta)$ выпуклости порядка β , $0 \leq \beta < 1$, класса $C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ определяется как единственный на промежутке $[0, 1)$ корень уравнения

$$1 - \beta - \frac{2\gamma m r^m}{1 - r^{2m}} - \frac{|\alpha| \lambda n r^n}{1 + \operatorname{sign} \alpha \cdot \lambda r^n} = 0, \quad (19)$$

где $m = 1$ при $f(z) \in \mathcal{N}$ и $m = n$ при $f(z) \in \mathcal{N}_n$.

Доказательство. Проверим выполнение при $|z| = r_0(\beta)$ условия выпуклости $1 + \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq \beta$ порядка β . В силу оценки (13) получаем

$$1 + \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq 1 - \frac{2\gamma m r^m}{1 - r^{2m}} + \min_{|z|=r} \operatorname{Re} \frac{\alpha \lambda n z^n}{1 - \lambda z^n}. \quad (20)$$

Осуществляя замену $\zeta = z^n$, нетрудно установить, что

$$\min_{|z|=r} \operatorname{Re} \frac{\alpha \lambda n z^n}{1 - \lambda z^n} = \begin{cases} -\alpha \lambda n r^n / (1 + \lambda r^n), & \alpha \geq 0 \\ \alpha \lambda n r^n / (1 - \lambda r^n), & \alpha < 0 \end{cases} = -\frac{|\alpha| \lambda n r^n}{1 + \operatorname{sign} \alpha \cdot \lambda r^n}.$$

Поэтому в силу (20) при $|z| = r$, где $r = r_0(\beta)$ – наименьший положительный корень уравнения (19), получаем, что для функции $f(z)$ выполняется условие выпуклости порядка β

$$1 + \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq 1 - \frac{2\gamma m r^m}{1 - r^{2m}} - \frac{|\alpha| \lambda n r^n}{1 + \operatorname{sign} \alpha \cdot \lambda r^n} = \beta.$$

При этом, поскольку функция

$$\mu(r) = \frac{2\gamma m r^m}{1 - r^{2m}} + \frac{|\alpha| \lambda n r^n}{1 + \operatorname{sign} \alpha \cdot \lambda r^n}$$

монотонно возрастает на промежутке $[0, 1]$ от 0 до $+\infty$, то $r_0(\beta)$ является единственным корнем уравнения (20) на промежутке $[0, 1]$.

Покажем, что радиус выпуклости $r_0(\beta)$ является точным.

Пусть $f(z) \in \mathcal{N}$. Если n – нечетное, то для функции $f_3(z)$ из (18) в точке $z = -r$ в условии выпуклости порядка β достигается знак равенства:

$$1 + z \frac{f_3''(z)}{f_3'(z)} \Big|_{z=-r} = 1 + \left(\frac{2\gamma z}{1 - z^2} + \frac{\alpha \lambda n z^n}{1 - \lambda z^n} \right) \Big|_{z=-r} = 1 - \frac{2\gamma r}{1 - r^2} - \frac{\alpha \lambda n r^n}{1 + \lambda r^n} = \beta.$$

Если n — четное и $n = 2(2k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$, то $i^n = -1$ и для $z = ir$ имеем $z^n = -r^n$, $iz = -r$. Поэтому для функции $f_1(z)$ из (16) получаем

$$1 + z \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} \Big|_{z=ir} = 1 + \left(\frac{2\gamma iz}{1 + z^2} + \frac{\alpha \lambda n z^n}{1 - \lambda z^n} \right) \Big|_{z=ir} = 1 - \frac{2\gamma r}{1 - r^2} - \frac{\alpha \lambda n r^n}{1 + \lambda r^n} = \beta.$$

Если же $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, то $i^n = 1$ и, если $\varepsilon = i^{\frac{n+2}{n}}$, то для $z = -\varepsilon r$ имеем $z^n = -r^n$, $\varepsilon^{-1}z = -r$. Поэтому для функции $f_2(z)$ из (17) в точке $z = -\varepsilon r$ получаем

$$1 + z \frac{f_2''(z)}{f_2'(z)} = 1 + \left(\frac{2\gamma \varepsilon^{-1}z}{1 - \varepsilon^{-2}z^2} + \frac{\alpha \lambda n z^n}{1 - \lambda z^n} \right) \Big|_{z=-\varepsilon r} = 1 - \frac{2\gamma r}{1 - r^2} - \frac{\alpha \lambda n r^n}{1 + \lambda r^n} = \beta.$$

Поэтому при $r > r_0(\beta)$ на окружности при $|z| = r$ условие выпуклости порядка β будет нарушаться. То есть, радиус выпуклости увеличить нельзя.

Если $f(z) \in \mathcal{N}_n$, то рассмотрим функцию

$$f_6(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t^n}{1-t^n} \right)^\gamma \frac{dt}{(1-\lambda t^n)^\alpha} \in C_n(\lambda, \alpha, \gamma),$$

несложно убедиться, что радиус выпуклости является точным. Для нее в условии выпуклости порядка β знак равенства достигается при нечетном n в точке $z = -r$ с учетом того, что $z^n = -r^n$, при четном $n = 2(2k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$, в точке $z = ir$ с учетом того, что $i^n = -1$ и $z^n = -r^n$, а при четном $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, в точке $z = i^{\frac{n+2}{n}} r$ с учетом того, что в этом случае $i^n = 1$ и $z^n = -r^n$.

Теорема 2 доказана.

При $\beta = 0$ теорема 2 дает радиусы выпуклости различных подклассов почти выпуклых функций.

Следствие 1. Пусть $f(z) \in \mathcal{N}$. Тогда точные радиусы выпуклости ниже приведенных классов почти выпуклых функций определяются по формуле:

1) $r_0 = \frac{2\gamma + \alpha + \sqrt{(2\gamma + \alpha)^2 - 4(\alpha - 1)}}{2(\alpha - 1)}$ для класса $C_1(1, \alpha, \gamma)$: $|\arg [(1 - z)^\alpha f'(z)]| \leq \gamma \frac{\pi}{2}$, $\alpha \in (0; 1) \cup (1; 2]$;

$$2) r_0 = \frac{1}{2\gamma+1} \text{ для класса } C_1(1,1,\gamma): |\arg [(1-z)f'(z)]| \leq \gamma \frac{\pi}{2};$$

$$3) r_0 = 1/3 \text{ для класса } C_1(1,1,1): \operatorname{Re} [(1-z)f'(z)] \geq 0;$$

$$4) r_0 = \gamma + 1 + \sqrt{\gamma(\gamma+2)} \text{ для класса } C_1(1,2,\gamma): |\arg [(1-z)^2 f'(z)]| \leq \gamma \frac{\pi}{2};$$

$$5) [5] r_0 - \text{единственный на промежутке } [0,1) \text{ корень уравнения} \\ r^4 - 2\gamma r^3 - 2r^2 - 2\gamma r + 1 = 0, \text{ для класса } C_2(1,1,\gamma): |\arg [(1-z^2)f'(z)]| \leq \gamma \frac{\pi}{2};$$

$$6) [3] r_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \right) \text{ для класса } C_2(1,1,1): \operatorname{Re} [(1-z^2)f'(z)] \geq 0;$$

$$7) r_0 = \sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma \text{ для класса } \mathcal{R}(\gamma) = C_1(0,1,\gamma): |\arg f'(z)| \leq \gamma \frac{\pi}{2};$$

$$8) [18] r_0 = \sqrt{2} - 1 \text{ для класса } \mathcal{R} = C_1(1,0,1): \operatorname{Re} f'(z) \geq 0.$$

При $\beta = \lambda = 0$ из уравнения (19) при $m = n$ получаем

$$r_0 = \sqrt[n]{\sqrt{n^2\gamma^2 + 1} - n\gamma}, \quad (21)$$

а при $n = 2, \lambda = \alpha = 1$ имеем

$$r_0 = \sqrt{2\gamma + 1 - 2\sqrt{\gamma(\gamma+1)}}. \quad (22)$$

Следствие 2. Радиусы выпуклости классов

$$\mathcal{R}(\gamma) = C_1(0,1,\gamma) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n: |\arg f'(z)| \leq \frac{\gamma\pi}{2} \right\} \text{ при } n \geq 1 \text{ и}$$

$$C_1(1,2,\gamma) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n: |\arg [(1-z)^2 f'(z)]| \leq \frac{\gamma\pi}{2} \right\} \text{ при } n = 2 \text{ определяются по формулам} \\ (21) \text{ и } (22). \text{ Результат точный.}$$

Значение радиуса выпуклости (21) получено ранее в [6] и при $\gamma = 1$ – в [19], а радиуса выпуклости (22) – в [5].

4. Теоремы роста и радиусы выпуклости в классе $T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ и его подклассах

Используя взаимосвязь (10) классов $C_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ и $T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$, также выражающую известную связь [1, с.6] выпуклых и звездообразных функций $f(z) \in S^0 \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in S^*$, и вытекающее из нее соотношение $zf''(z)/f'(z) = zF'(z)/F(z) - 1$, все результаты предыдущих разделов легко перенести на функции класса $T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$.

Теорема 3. Пусть $F(z) \in T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ и $m = 1$ при $F(z) \in \mathcal{N}$ и $m = n$ при $F(z) \in \mathcal{N}_n$. Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r^m}{1+r^m} \right)^\gamma \frac{r}{(1+\lambda r^n)^\alpha} \leq |F(z)| \leq \left(\frac{1+r^m}{1-r^m} \right)^\gamma \frac{r}{(1-\lambda r^n)^\alpha} \text{ при } \alpha \geq 0, \quad (23)$$

$$\left(\frac{1-r^m}{1+r^m}\right)^{\gamma} \frac{r}{(1-\lambda r^n)^{\alpha}} \leq |F(z)| \leq \left(\frac{1+r^m}{1-r^m}\right)^{\gamma} \frac{r}{(1+\lambda r^n)^{\alpha}} \text{ при } \alpha < 0, \quad (24)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+\lambda(\alpha n-1)z^n}{1-\lambda z^n} \right| \leq \frac{2\gamma m r^m}{1-r^{2m}} \quad (25)$$

и точный радиус звездообразности $r^*(\beta)$ порядка β класса $T_n(\lambda, \alpha, \gamma)$ определяется как единственный на промежутке $[0, 1)$ корень уравнения (19).

Пусть $\operatorname{Im} F(z) = 0$ при $z \in (-1; 1)$ и $\operatorname{Im} F(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0$ в остальных точках круга E . Тогда при $\lambda = \alpha = 1, m = 2$ получаем подкласс $CS_1^*(\gamma) = T(\gamma)$ типично вещественных функций. Этому частному случаю теоремы 3 соответствует

Следствие 3. Пусть функция $F(z) \in T(\gamma)$, то есть $F(z)$ в точках $z \in (-1; 1)$ принимает вещественные значения и удовлетворяет условию

$$|\arg((1-z^2)F(z)/z)| \leq \frac{\gamma\pi}{2}, \quad z \in E.$$

Тогда при $|z| = r, 0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\gamma} \frac{r}{1+r^2} \leq |F(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma} \frac{r}{1-r^2}, \quad (26)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r^2}. \quad (27)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+2\gamma r+r^2}{1-r^2}, \quad (28)$$

$$|F'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\gamma} \frac{1+2\gamma r+r^2}{(1-r^2)^2}. \quad (29)$$

Оценки (26), (27) – прямые следствия оценок (23), (25). Оценка (28) вытекает из (27). Оценка (29) получается из вытекающего в силу (28) и (26) неравенства

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\gamma} (1-r^2)|F'(z)| \leq \left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+2\gamma r+r^2}{1-r^2}.$$

Отметим, что при $\gamma = 1$ оценки (27), (28) получены в [15], а оценки (26), (29) – в [14].

Следствие 4. Пусть $F(z) \in \mathcal{N}$. Тогда точный радиус звездообразности порядка β ниже приведенных классов почти звездообразных функций определяется как единственный на промежутке $[0, 1)$ корень уравнения:

$$1) [8] (1+\beta)r^4 - 2r(r^2+r+1) + (1-\beta) = 0 \text{ для класса } CS_1^* = T_2(1,1,1): \\ \operatorname{Re}\{(1-z^2)F(z)/z\} \geq 0;$$

2) [9] $(1 + \beta)r^2 - 4r + 1 - \beta = 0$ для класса $CS_2^* = T_1(1,2,1)$: $Re \{(1 - z)^2 F(z)/z\} \geq 0$,
то есть $r^*(\beta) = (2 - \sqrt{3 + \beta^2})/(1 + \beta)$;

3) [9] $\beta r^2 - 3r + 1 - \beta = 0$ для класса $CS_3^* = T_1(1,1,1)$: $Re \{(1 - z)F(z)/z\} \geq 0$,
то есть $r^*(\beta) = (3 - \sqrt{9 - 4\beta(1 - \beta)})/(2\beta)$;

4) [10] $(2 - \beta)r^3 + 2\beta r^2 + (\beta - 6)r + 2(1 - \beta) = 0$ для класса
 $CS_5^* = T_1(1/2, -1, 1) = \{F(z) \in \mathcal{N} : Re(F(z)/(z - z^2/2)) \geq 0\}$;

5) $(1 - \beta)r^2 + 2r - (1 - \beta) = 0$ для класса
 $CS_4^* = T_1(0,1,1) = \{F(z) \in \mathcal{N} : Re(F(z)/z) \geq 0\}$, то есть
 $r^*(\beta) = (\sqrt{1 + (1 - \beta)^2} - 1)/(1 - \beta)$.

Пусть $\beta = 0$. Поскольку CS_1^* совпадает с классом T типично вещественных функций, если $Im F(z) = 0$ при $z \in (-1; 1)$ и $Im F(z) \cdot Im z > 0$ при $z \in E \setminus (-1; 1)$, то из пункта 1) получаем радиус звездообразности [15, 20] $r^* = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \right)$ класса T . Также, при $\beta = 0$ пункт 5) совпадает с результатом из [18] о радиусе звездообразности $r^* = \sqrt{2} - 1$ класса $CS_4^* = \{F(z) \in \mathcal{N} : Re(F(z)/z) \geq 0\}$.

Заключение

В статье вводятся и исследуются два класса почти выпуклых и почти звездообразных функций, обобщающих ряд известных в литературе классов функций. Для введенных классов получены теоремы искажения (роста) и радиусы выпуклости (звездообразности), в частных случаях дающие как известные результаты, так и новые оригинальные результаты для некоторых малоизученных классов функций. Все полученные оценки и радиусы выпуклости (звездообразности) являются точными.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолиственности аналитических функций // УМН. – 1975. – Т. 30, вып. 4(184). – С. 3–60. <https://www.mathnet.ru/links/e7c4d119db41755ee64c4677f4c40f9b/rm4232.pdf>.
- 2 Reade M.O. The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J. – 1956. – Vol. 23. – No. 3. – P. 459–462. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0>.
- 3 Hengartner W., Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 28. – No. 2. – P. 519–524. <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>.
- 4 Lecko A. The class of functions convex in the negative direction of the imaginary axis of order (α, β) // J. of the Austr. Math. Soc. – 2002. – Vol. 29. – No. 11. – P. 641–650. <https://dx.doi.org/10.1155/S0161171202007810>.
- 5 Майер Ф.Ф. Геометрические свойства некоторых классов аналитических в круге функций, выпуклых в направлении мнимой оси // Костанай. Вестник науки КГУ им. А. Байтурсынова. Серия ест.-техн. наук. – 2002. – Вып. 6. – № 2. – С. 48–50. <https://repo.kspi.kz/bitstream/handle/123456789/7030/2002-6-2-page48-50.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- 6 Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т. Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций // Вестник ТГУ, Серия «Математика и механика», Томск. – 2023. – № 84. – С. 147–156. <https://cyberleninka.ru/article/n/ob-obobschenii-nekotoryh-klassov-pochti-vypuklyh-i-tipichno-veschestvennyh-funktsiy/viewer>.

- 7 Reade M.O. On close-to-close univalent functions // Michigan Math. J. – 1955. – No. 3. – P. 59–62. <https://doi.org/10.1307/mmj/1031710535>.
- 8 Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744. – 2020. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>.
- 9 Sebastianc A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca 71. – 2021. – No. 1. – P. 83–104. <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454>.
- 10 Kanaga R., Ravichandran V. Starlikeness for Certain Close-to-Star Functions // Hacet. J. Math. Stat. – 2021. – Vol. 50. – P. 104–118 2, 414–432. <https://doi.org/10.15672/hujms.702703>.
- 11 Sharma M., Jain N.K., Kumar S. Constrained radius estimates of certain analytic functions // arXiv:2305.16210v1 [math.CV] – 2023.
- 12 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11734, 2020 arxiv.org. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>.
- 13 Rogosinski W. Über positive harmonische entwicklungen und typisch-reelle potenzreihen // Math. Zeitschr. – 1932. – Vol. 35. – No. 1. – P. 93–121. <https://doi.org/10.1007/BF01186552>.
- 14 Голузин Г.М. О типично вещественных функциях // Матем. сб. – 1950. – Вып. 27. – №. 69. – С. 201–218. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5913&option_lang=eng
- 15 Гельфер С.А. Типично вещественные функции // Матем. сб. – 1964. – Т. 106. – № 2. – С. 171–184. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=4441&option_lang=rus.
- 16 Noshiro K. On the theory of schlicht functions // J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I Math. – 1934. – Vol. 2. – No. 3. – P. 129–155. <https://doi.org/10.14492/hokmj/1531209828>.
- 17 Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин – М.: Наука, 1966. – 628 с.
- 18 MacGregor T.H. Functions whose derivative has a positive real part // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – № 104. – P. 532–537. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1962-0140674-7>.
- 19 Shaffer D.B. Distortion theorems for a special class of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 39. – No. 2. – P. 281–287. <https://doi.org/10.2307/2039632>.
- 20 Libera R.J. Some radius of convexity problems // Duke Math. J. – 1964. –Vol. 31. – No.1. – P. 143–158. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03114-X>.

REFERENCES

- 1 Avkhadiyev F.G., Aksent'ev L.A. (1975) The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht. Russian Mathematical Surveys, vol. 30, no. 4, pp. 1–63. https://www.mathnet.ru/links/1632ed8357df9ffe04ddeebedf7e40ba/rm4232_eng.pdf.
- 2 Reade M.O. (1956) The coefficients of close-to-convex functions. Duke Math. J., vol. 23, no. 3, pp. 459–462. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0>.
- 3 Hengartner W. and Schober G. (1971) Analytic functions close to mappings convex in one direction. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 28, no. 2, pp. 519–524. <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>
- 4 Lecko A. (2002) The class of functions convex in the negative direction of the imaginary axis of order (α, β) . J. of the Austr. Math. Soc., vol. 29, no. 11, pp. 641–650. doi: <https://dx.doi.org/10.1155/S0161171202007810>
- 5 Maiyer F.F. (2002) Geometricheskie svoystva nekotorykh klassov analiticheskikh v krug funkciy, vypuklykh v napravlenii mnimoy osi. [Geometric properties of some classes of analytic functions in a circle in the direction of the imaginary axis]. Kostanaj. Vestnik nauki KGU im. A. Bajtursynova. Seriya estestvenno-tehnicheskikh nauk, vol. 6, no. 2, pp. 48–50. <https://repo.kspi.kz/bitstream/handle/123456789/7030/2002-6-2-page48-50.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. [In Russian].
- 6 Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemisova A.A. and Baimankulov A.T. (2023) Ob obobshhenii nekotorykh klassov pochti vypuklykh i tipichno veshhestvennykh funkciy [On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions]. Zhurnal «Vestnik TGU», seriya «Matematika. Mehanika», Tomsk, no. 80, pp. 147–156. [In Russian]. <https://cyberleninka.ru/article/n/ob-obobschenii-nekotoryh-klassov-pochti-vypuklykh-i-tipichno-veschestvennykh-funktsiy/viewer>
- 7 Reade M.O. (1955) On close-to-close univalent functions. Michigan Math. J., no. 3, pp. 59–62.

- 8 Khatter K., Lee, S. K. and Ravichandran V. (2020) Radius of starlikeness for classes of analytic functions. arXiv preprint arXiv:2006.11744. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744>.
- 9 Sebastianc A. and Ravichandran V. (2021) Radius of starlikeness of certain analytic functions. Math. Slovaca, vol. 71, no. 1, pp. 83–104. <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0454>.
- 10 Kanaga R. and Ravichandran V. (2021) Starlikeness for certain close-to-star functions. Hacet. J. Math. Stat., vol. 50, no. 2, pp. 414–432. <https://doi.org/10.15672/hujms.702703>.
- 11 Sharma M., Jain N.K. and Kumar S. (2023) Constrained radius estimates of certain analytic functions. arXiv:2305.16210v1/
- 12 El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V. and Supramaniam S. (2020). Starlikeness of certain analytic functions. arXiv preprint arXiv:2006.11734. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734>.
- 13 Rogosinski W. (1932) Über positive harmonische entwicklungen und typisch-reelle potenzreihen. Math. Zeitschr., vol. 35, no. 1, pp. 93–121. <https://doi.org/10.1007/BF01186552>.
- 14 Goluzin G.M. (1950) On typically real functions. Matem. sb., vol. 27, no. 69, 201–218. [In Russian]. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5913&option_lang=eng
- 15 Gelfer S.A. (1964) Tipichno veshhestvennye funktsii [Typically real functions]. Matem. sb., 64(106):2, 171–184. <https://www.mathnet.ru/rus/sm4441>. [In Russian]
- 16 Noshiro K. (1934) On the theory of schlicht functions. J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I Math., vol. 2, no. 3, pp. 129–155. <https://doi.org/10.14492/hokmj/1531209828>
- 17 Goluzin G.M. (1966) Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo [Geometric Theory of Functions of a Complex Variable]. Moscow, Nauka Publ., 628 p. [In Russian].
- 18 MacGregor T.H. (1962) Functions whose derivative has a positive real part. Trans. Amer. Math. Soc., no. 104, pp. 532–537. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7>.
- 19 Shaffer D.B. (1973) Distortion theorems for a special class of analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 39, no. 2, pp. 281–287. <https://doi.org/10.2307/2039632>.
- 20 Libera R.J. (1964) Some radius of convexity problems. Duke Math. J., vol. 31, no. 1, pp. 143–158. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03114-X>.

¹Maiyer F.F.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
e-mail: maiyer@mail.ru

¹Tastanov M.G.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
ORCID ID: 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru

¹*Utemissova A.A.,

Candidate of Pedagogical Sciences, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,
e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹Ysmagul R.S.,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,
e-mail: ismagulr@mail.ru

¹Non-commercial joint-stock company «Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University»,
Kostanay 110000, Kazakhstan

ON THE GENERALIZATION OF SOME CLASSES OF CONVEX IN DIRECTION AND TYPICALLY REAL FUNCTIONS

Abstract

In the article by M.O. Reade (Duke Math. Journal, 1956) using the condition $|\arg (f'(z)/g'(z))| \leq \frac{\gamma\pi}{2}$, where $g(z)$ is a convex function, $0 \leq \gamma \leq 1$, a class of functions close-

to-convex (almost convex) of order γ is introduced. In our paper, we introduce a subclass of the class of close-to-convex (almost convex) order γ functions satisfying the condition $|\arg [(1 - \lambda z^n)^\alpha f'(z)]| \leq \gamma\pi/2$, which, for different parameter values, gives a number of well-known subclasses of univalent (schlicht) functions. Based on this subclass, a class of close-to-starlike (almost star-shaped) functions is constructed, containing a number of subclasses that have been actively studied by many authors in recent years, as well as a classical class of typically real functions. For this classes exact theorems of distortion (growth) and radii of convexity (starlikeness) are obtained, generalizing previously known results. The case is also considered when the functions of the introduced classes have missing members in the power series expansion. The results obtained are accurate and not only generalize previously known results, but also reveal the properties of a number of new subclasses of univalent (schlicht) functions.

Key words: close-to-convex (almost convex) functions, close-to-starlike (almost star-shaped) functions, typically real functions, growth estimates, distortion estimates, radii of convexity, radii of starlikeness.

¹Майер Ф.Ф.,

физ.-мат. ғылымдарының кандидаты, профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
e-mail: maiyer@mail.ru

¹Тастанов М.Г.,

физ.-мат. ғылымдарының кандидаты, профессор, ORCID ID: 0000-0002-2278-2723,
e-mail: maiyer@mail.ru

^{1*}Утемисова А.А.,

педагогика ғылымдарының кандидаты, ORCID ID: 0000-0001-5143-0260,
*e-mail: anar_utemisova@mail.ru

¹Ысмағұл Р.С.,

физ.-мат. ғылымдарының кандидаты, профессор, ORCID ID: 0009-0007-6594-7958,
e-mail: ismagulr@mail.ru

¹«Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті» КЕАҚ, Қостанай қ.,
110000, Қазақстан

БАҒЫТТАҒЫ ДӨҢЕС ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЕЙБІР КЛАССТАРЫН ЖӘНЕ ТИПТІК НАҚТЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ЖАЛПЫЛАУ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

М.О. Ридтің (M.O. Reade, Duke Math. Journal, 1956) мақаласында $|\arg(f'(z)/g'(z))| \leq \frac{\gamma\pi}{2}$, мұндағы $g(z)$ – дөңес функция, $0 \leq \gamma \leq 1$ шартының көмегімен γ ретті дөңес дерлік функциялар класы енгізілген. Біздің мақаламызда параметрлердің әртүрлі мәндерінде бір паракты функциялардың белгілі қосалқы класын беретін және $|\arg[(1 - \lambda z^n)^\alpha f'(z)]| \leq \gamma\pi/2$ шартын қанағаттандыратын γ ретті дөңес дерлік функциялар класының қосалқы класы енгізілді. Осы қосалқы класстың негізінде, соңғы жылдары көптеген авторлар белсенді түрде зерттеген құрамына бірқатар қосалқы класстар кіретін жұлдыз тәрізді дерлік функциялар класы мен әдепкі нақты функциялардың классикалық класы құрылды. Бұл класстар үшін сәйкесінше бұрмалану (өсу) және дөңестік радиустар (жұлдыз тәрізді) туралы теоремалар алынды. Сондай-ақ зерттелетін функциялар қатарларға жіктелген кезде мүшелерін өткізіп жіберетін жағдай да қарастырылған. Алынған нәтижелер дәл және бұрын белгілі нәтижелерді жалпылап қана қоймай, сонымен қатар бір паракты функциялардың жаңа қосалқы класстарының қасиеттерін де ашады.

Тірек сөздер: дөңес дерлік функциялар, жұлдыз тәрізді дерлік функциялар, әдепкі нақты функциялар, өсуді бағалау, бұрмалануды бағалау, дөңестік радиустар, жұлдыз тәрізді радиустар.

Дата поступления статьи в редакцию: 03.06.2024