

ӨОЖ 17.95

ҒТАХР 27.31.44, 27.29.15, 27.41.19

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-3-165-175>

^{1,2}**Искакова Н.Б.,**

ф-м.ғ.к., аға ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,

*e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3,4}**Кадирбаева Ж.М.,**

ф-м.ғ.к., аға ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0001-8861-4100,

e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

^{1,3}**Бакирова Э.А.,**

ф-м.ғ.к., аға ғылыми қызметкер, ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,

e-mail: bakirova1974@mail.ru

²**Қуаныш С.Қ.,**

докторант, оқытушы, ORCID ID: 0009-0006-0975-1662,

e-mail: saule270898@gmail.com

¹Математика және математикалық модельдеу институты, 050010, Алматы қ., Қазақстан

²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, 050040, Алматы қ., Қазақстан

³Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан

⁴Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан

ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ САНДЫҚ ӘДІСІ

Аңдатпа

Параболалық теңдеу үшін сызықтық шеттік есеп тұйық облыста қарастырылады. Параболалық теңдеу үшін шеттік есеп сынық әдісі негізінде x айнымалысы бойынша $u(t, x)$ белгісіз функциясын дискреттеу арқылы сызықты жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есепке айналдырылады. Алынған екі нүктелі шеттік есеп профессор Джумабаевтың параметрлеу әдісімен зерттеледі. Осы әдіс негізінде жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің сандық шешімін табу алгоритмі құрылады. Құрылған алгоритм белгілі сандық әдістерді қолдану арқылы іске асырылады. Параметрлеу әдісінің конструктивтілігі мен тиімділігі параболалық теңдеу үшін қарастырылып отырған сызықтық шеттік есептің сандық шешімін құруға мүмкіндік береді. Ұсынылған алгоритмді тексеру және көрсету үшін бір сандық мысал келтіріледі.

Тірек сөздер: параболалық теңдеу, шеттік есеп, алгоритм, сандық шешім, параметрлеу әдісі.

Кіріспе

Параболалық теңдеулер ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады [1–5]. Олар электрондық компоненттерді салқындату жүйелерін жобалауда, жер қыртысындағы жылу ағынын модельдеуде, гипертермиямен қатерлі ісіктерді емдеуде жылу таралуын талдауда, сондай-ақ жылу өткізгіштік сипаттамаларын бақылау арқылы жаңа материалдардың жылу қасиеттерін зерттеуде маңызды рөл атқарады [6–12].

Бұл жұмыста $\Omega = (0, T) \times (0, \omega)$ облысында параболалық теңдеу үшін қойылған келесідей шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m(t, x)u + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathcal{B}(x)u(0, x) + c(x)u(T, x) = d(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \psi_0(t), \quad u(t, \omega) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

мұндағы $a(t, x) \geq \gamma > 0$, $m(t, x) \leq 0$, $f(t, x)$ функциялары $\overline{\Omega}$ облысында, $\mathcal{B}(x)$, $c(x)$, $d(x)$ функциялары $[0, \omega]$ аралығында, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ функциялары $[0, T]$ аралығында жеткілікті тегіс және

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0)\psi_0(0) + c(0)\psi_0(T) &= d(0), \\ \mathcal{B}(\omega)\psi_1(0) + c(\omega)\psi_1(T) &= d(\omega) \end{aligned}$$

келісімділік шарттары орындалады.

(1) – (3) параболалық теңдеу үшін қойылған шеттік есептің шешімі деп Ω облысында үзіліссіз және t айнымалысы бойынша бірінші ретті және x айнымалысы бойынша екінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болатын, (1) параболалық теңдеуін, (2) және (3) шарттарын қанағаттандыратын $u(t, x)$ функциясын айтамыз.

(1) – (3) параболалық теңдеу үшін $c(x)=0$ жағдайындағы сызықтық шеттік есептер [10, 11] жұмыстарында қарастырылады. Сынықтар әдісі негізінде теңдеу коэффициенттері мен шеттік шарттар терминдерінде шешімнің және оның туындыларының бағалаулары [10] жұмысында алынған. Бір кеңістіктік айнымалысы бар параболалық теңдеу үшін сызықтық шеттік есептің шешімінің және x бойынша бірінші туындысының дәлірек коэффициентті бағалаулары [11] жұмысында тағайындалған.

Ұсынылып отырған жұмыстың мақсаты – (1) – (3) параболалық теңдеу үшін сызықтық шеттік есептің шешімін табудың сандық алгоритмін Джумабаевтың параметрлеу әдісі негізінде құру.

Өртүрлі дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің аналитикалық және сандық шешімдерін табуға арналған параметрлеу әдісінің [12, 13] жүзеге асырылуы, конструктивтілігі және оның тиімділігі [14–24] жұмыстарында көрсетілген.

Материалдар мен әдістер

Кез келген $\tau > 0$ алып, (1) – (3) шеттік есебінде x айнымалысы бойынша дискреттеу жасалынады: $x_i = i\tau$, $i = \overline{0, N}$, $N\tau = \omega$. Келесі белгілеулерді енгізейік: $u_i(t) = u(t, i\tau)$, $a_i(t) = a(t, i\tau)$, $m_i(t) = m(t, i\tau)$, $f_i(t) = f(t, i\tau)$, $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(i\tau)$, $c_i = c(i\tau)$, $d_i = d(i\tau)$, $i = \overline{0, N}$.

Осы белгілеулерді ескере отырып (1) – (3) параболалық теңдеу үшін қойылған шеттік есебін келесідей есеппен алмастырамыз:

$$\frac{du_i}{dt} = a_i(t) \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\tau^2} + m_i(t)u_i + f_i(t), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (4)$$

$$\mathcal{B}_i u_i(0) + c_i u_i(T) = d_i, \quad i = \overline{0, N}, \quad (5)$$

$$u_0(t) = \psi_0(t), \quad u_N(t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

мұнда $u_0(t)$ және $u_N(t)$ функциялары белгілі.

Бұл (4) – (6) жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебін векторлық-матрицалық түрде жазайық:

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{A}(t)v + \mathcal{F}(t), \quad v \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$\mathcal{B}v(0) + \mathcal{C}v(T) = \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad (8)$$

мұндағы $v(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N-1}(t))'$ – белгісіз функция, ал $(N-1) \times (N-1)$ өлшемді $\mathcal{A}(t)$ матрицасы мен $(N-1)$ өлшемді $\mathcal{F}(t)$ векторы $[0, T]$ аралығында үзіліссіз. Мұнда

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2a_1(t)}{\tau^2} + m_1(t) & \frac{a_1(t)}{\tau^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_2(t)}{\tau^2} & -\frac{2a_2(t)}{\tau^2} + m_2(t) & \frac{a_2(t)}{\tau^2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{a_3(t)}{\tau^2} & -\frac{2a_3(t)}{\tau^2} + m_3(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2a_{N-1}(t)}{\tau^2} + m_{N-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a_1(t)}{\tau^2} \psi_0(t) + f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \dots \\ \frac{a_{N-1}(t)}{\tau^2} \psi_1(t) + f_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

(7), (8) жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебінің шешімі деп (7) жай дифференциалдық теңдеуін және (8) шеттік шартын қанағаттандыратын $v^*(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^{N-1})$ функциясын атаймыз.

Негізгі ережелер

(7), (8) жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебін шешу үшін профессор Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісін қолданайық. Бұл әдістің схемасы бойынша берілген $[0, T]$ аралығын ішкі бөліктерге бөлейік:

$$[0, T) = \bigcup_{s=1}^M [t_{s-1}, t_s).$$

$C([0, T], t_s, \mathbb{R}^{M(N-1)})$ арқылы $v[t] = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_M(t))$ функциялар жүйесінен тұратын кеңістігін белгілейміз, мұнда:

- 1) $v_s: [t_{s-1}, t_s) \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ функциялары $t \in [t_{s-1}, t_s)$, $s = \overline{1, M}$, аралықтарында үзіліссіз;
- 2) $\forall s = \overline{1, M} \quad \exists \lim_{t \rightarrow t_s-0} v_s(t)$.

(7), (8) есебіндегі $v(t)$ функциясының $t \in [t_{s-1}, t_s)$, $s = \overline{1, M}$, аралықтарына сығылуын $v_s(t)$ деп белгілеп алып, қосымша $k_s = v_s(t_{s-1})$, $s = \overline{1, M}$, параметрлерін енгізіп алайық. Сосын әрбір ішкі $[t_{s-1}, t_s)$, $s = \overline{1, M}$, аралықтарында $y_s(t) = v_s(t) - k_s$, $s = \overline{1, M}$, алмастыруларын жасаймыз да, (7), (8) есебіне пара-пар болатын төмендегідей параметрлері бар шеттік есебін аламыз:

$$\frac{dy_s}{dt} = \mathcal{A}(t)(y_s + k_s) + \mathcal{F}(t), \quad t \in [t_{s-1}, t_s), \quad s = \overline{1, M}, \quad (9)$$

$$y_s(t_{s-1}) = 0, \quad s = \overline{1, M}, \quad (10)$$

$$B\kappa_1 + C\kappa_M + C \lim_{t \rightarrow T-0} y_M(t) = \varphi, \quad (11)$$

$$\kappa_s + \lim_{t \rightarrow t_s-0} y_s(t) = \kappa_{s+1}, \quad s = \overline{1, M-1}. \quad (12)$$

(9) – (12) параметрлері бар шеттік есебінің шешімі деп $\kappa^* = (\kappa_1^*, \dots, \kappa_M^*) \in \mathbb{R}^{M(N-1)}$, $y^*[t] = (y_1^*(t), \dots, y_M^*(t)) \in C([0, T], t_s, \mathbb{R}^{M(N-1)})$ элементтерімен $(y^*[t], \kappa^*)$ жұбын айтамыз, бұл жерде $y_s^*(t)$ функциялары $[t_{s-1}, t_s)$, $s = \overline{1, M}$, ішкі аралықтарында үзіліссіз дифференциалданады және (9) дифференциалдық теңдеулерін, $\kappa_s = \kappa_s^*$, $s = \overline{1, M}$, болғанда (10) – (12) шарттарын қанағаттандырады.

(7), (8) есебі мен (9) – (12) параметрлері бар шеттік есебі пара-пар. Егер $v^*(t)$ функциясы (7), (8) есебінің шешімі болса, онда $(y^*[t], \kappa^*)$ жұбы, мұндағы

$$y^*[t] = (v^*(t) - v^*(t_0), v^*(t) - v^*(t_1), \dots, v^*(t) - v^*(t_{M-1})), \\ \kappa^* = (v^*(t_0), v^*(t_1), \dots, v^*(t_{M-1}))$$

(9) – (12) параметрлері бар шеттік есебінің шешімі болады. Керісінше, егер де $(\hat{y}[t], \hat{\kappa})$ жұбы (9) – (12) параметрлері бар шеттік есебінің шешімі болса, онда

$$\hat{v}(t) = \hat{\kappa}_s + \hat{y}_s(t), \quad t \in [t_{s-1}, t_s), \quad s = \overline{1, M}, \\ \hat{v}(T) = \hat{\kappa}_M + \lim_{t \rightarrow T-0} \hat{y}_M(t),$$

теңдіктерімен анықталатын $\hat{v}(t)$ функциясы (7), (8) есебінің шешімі болады.

Нәтижелер мен талқылау

Қосымша $\kappa_s = v_s(t_{s-1})$, $s = \overline{1, M}$, параметрлерін енгізу $y[t] = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_M(t))$ функциялар жүйесінің компоненттері үшін (10) шарттарын алуға мүмкіндік берді және де (9), (10) есептері κ_s , $s = \overline{1, M}$, параметрлерінің бекітілген мәндерінде Коши есептері болады. $[t_{s-1}, t_s)$, $s = \overline{1, M}$, ішкі аралықтарында бұл Коши есептері жеке шешіледі. Бұл Коши есептерінің шешімдерін табу үшін іргелі матрица қолданылады.

(9), (10) Коши есебінің шешімін $\mathcal{X}(t)$ – іргелі матрицасын қолданып жазайық:

$$y_s(t) = \mathcal{X}(t) \int_{t_{s-1}}^t \mathcal{X}^{-1}(\xi) \mathcal{A}(\xi) d\xi \cdot \kappa_s + \mathcal{X}(t) \int_{t_{s-1}}^t \mathcal{X}^{-1}(\xi) \mathcal{F}(\xi) d\xi, \quad (13) \\ t \in [t_{s-1}, t_s), \quad s = \overline{1, M}.$$

Осы соңғы (13) өрнегін (11) және (12) шарттарына қояйық:

$$B\kappa_1 + C\kappa_M + C\mathcal{X}(T) \int_{t_{M-1}}^T \mathcal{X}^{-1}(\xi) \mathcal{A}(\xi) d\xi \cdot \kappa_M = \\ = \varphi - C\mathcal{X}(T) \int_{t_{M-1}}^T \mathcal{X}^{-1}(\xi) \mathcal{F}(\xi) d\xi, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} h_s + \mathcal{X}(t_s) \int_{t_{s-1}}^{t_s} \mathcal{X}^{-1}(\xi) \mathcal{A}(\xi) d\xi \cdot h_s - h_{s+1} = \\ = -\mathcal{X}(t_s) \int_{t_{s-1}}^{t_s} \mathcal{X}^{-1}(\xi) \mathcal{F}(\xi) d\xi, \quad s = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Бұл (14), (15) жүйесі арқылы $h \in \mathbb{R}^{M(N-1)}$ белгісіз параметрлерін табуға болады. Осы (14), (15) жүйесін $O \in \mathbb{R}^{N-1, N-1}$ нөлдік матрица, $I \in \mathbb{R}^{N-1, N-1}$ бірлік матрица және

$$z_r(P, t) = \mathcal{X}(t) \int_{t_{r-1}}^t \mathcal{X}^{-1}(\xi) P(\xi) d\xi, \quad r = \overline{1, M},$$

белгілеулерін ескере отырып келесідей түрде жинақтап жазайық:

$$Qh = F, \quad h \in \mathbb{R}^{M(N-1)}, \quad (16)$$

мұндағы

$$Q = \begin{bmatrix} B & O & O & \dots & O & C + C_{Z_M}(\mathcal{A}, T) \\ I + z_1(\mathcal{A}, t_1) & -I & O & \dots & O & O \\ O & I + z_2(\mathcal{A}, t_2) & -I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & -I & O \\ O & O & O & \dots & I + z_{M-1}(\mathcal{A}, t_{M-1}) & -I \end{bmatrix},$$

$$F = (\varphi - C_{Z_M}(\mathcal{F}, T), -z_1(\mathcal{F}, t_1), -z_2(\mathcal{F}, t_2), \dots, -z_{M-1}(\mathcal{F}, t_{M-1}))'.$$

(7), (8) шеттік есебінің шешілімділігі алынған (16) жүйесінің шешілімділігіне пара-пар екені айқын.

Ұсынылып отырған сандық алгоритм (16) жүйені құрып және осы жүйені шешуге негізделген. Бұл (16) жүйенің коэффициенттері мен оң жағы Коши есептерінің шешімі ретінде табылады.

(7), (8) есебін сандық шешу алгоритмі:

1°. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M = T$ аралығын қарастырамыз. Әрбір $[t_{s-1}, t_s)$, $s = \overline{1, M}$, ішкі аралығын $h_s = \frac{t_s - t_{s-1}}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, қадаммен ішкі бөліктерге бөлеміз.

2°. (16) жүйедегі Q матрицасы мен F векторын есептеу үшін әрбір ішкі аралықта h_s қадаммен $z_s(\mathcal{A}, h_s)$, $z_s(\mathcal{F}, h_s)$, $s = \overline{1, M}$, мәндерін төртінші ретті Рунге-Кутта әдісін қолданып табамыз.

3°. Сонда келесі жуық жүйені аламыз:

$$Q_*^{\tilde{h}} \tilde{h} = -F_*^{\tilde{h}}, \quad \tilde{h} \in \mathbb{R}^{M(N-1)}, \quad (17)$$

$\tilde{h}^{\tilde{h}}$ – бұл (17) жүйесінің шешімі: $v^{\tilde{h}r}(t_{s-1}) = \tilde{h}_s^{\tilde{h}}$, $s = \overline{1, M}$.

4°. Шешімнің ішкі аралықтардың қалған нүктелеріндегі жуық мәндерін келесідей Коши есептерін шешу арқылы табамыз:

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{A}(t)v + \mathcal{F}(t), \quad v(t_{s-1}) = \mathcal{H}_s^{\tilde{h}}, \quad [t_{s-1}, t_s), \quad s = \overline{1, M}. \quad (18)$$

Соңғы (18) Коши есептерін де төртінші ретті Рунге-Кутта әдісінің көмегімен шешіп, (7), (8) жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебінің сандық шешімін табамыз.

Егер $v^*(t_j^{\tilde{h}}) = (u_1^*(t_j^{\tilde{h}}), u_2^*(t_j^{\tilde{h}}), \dots, u_{N-1}^*(t_j^{\tilde{h}}))'$, $j = \overline{0, Mk}$, (7), (8) жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебінің сандық шешімі болса, онда $u^*(t_j^{\tilde{h}}, s\tau) = u_s^*(t_j^{\tilde{h}})$, $s = \overline{1, N-1}$, параболалық теңдеу үшін қойылған (1) – (3) шеттік есебінің сандық шешімі болады.

Осы ұсынылып отырған алгоритмнің жүзеге асырылуын көрсететін мысалды қарастырайық.

Мысал. Параболалық теңдеу үшін қойылған келесідей шеттік есепті қарастырайық:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (xt^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x + t)u + t \sin 10\pi t + x \sin 10\pi t + tx^4 + x^3 + t^2x^3 - 6t^3x^2 - 6tx + 10\pi \cos 10\pi t, \quad (t, x) \in \left(0, \frac{1}{10}\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (19)$$

$$xu(0, x) + (x^2 + 1)u\left(\frac{1}{10}, x\right) = \frac{x^5 + x^3}{10}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (20)$$

$$u(t, 0) = \sin 10\pi t, \quad u\left(t, \frac{1}{2}\right) = \frac{t}{8} + \sin 10\pi t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{10}\right]. \quad (21)$$

Параболалық теңдеу үшін қойылған (19) – (21) шеттік есебінің дәл шешімі: $u^*(t, x) = x^3t + \sin 10\pi t$.

$\tau = 0.1$ деп алып, (19) – (21) есебінде x айнымалысы бойынша дискреттеу жасаймыз: $x_i = i\tau$, $i = \overline{0, 5}$. Сонда (19) – (21) параболалық теңдеу үшін қойылған шеттік есебін келесідей жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебін аламыз:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{pmatrix} -20t^2 - t - \frac{2001}{10} & 10t^2 + 100 & 0 & 0 \\ 20t^2 + 100 & -40t^2 - t - \frac{1001}{5} & 20t^2 + 100 & 0 \\ 0 & 30t^2 + 100 & -60t^2 - t - \frac{2003}{10} & 30t^2 + 100 \\ 0 & 0 & 40t^2 + 100 & -80t^2 - t - \frac{1002}{5} \end{pmatrix} v +$$

$$+ \begin{pmatrix} \left(\frac{1001}{10} + t + 10t^2\right) \sin 10\pi t - \frac{5999}{10000}t + \frac{t^2}{1000} - \frac{3}{50}t^3 + 10\pi \cos 10\pi t + \frac{1}{1000} \\ \left(\frac{1}{5} + t\right) \sin 10\pi t - \frac{749}{625}t + \frac{1}{125}t^2 - \frac{6}{25}t^3 + 10\pi \cos 10\pi t + \frac{1}{125} \\ \left(\frac{3}{10} + t\right) \sin 10\pi t - \frac{17919}{10000}t + \frac{27}{1000}t^2 - \frac{27}{50}t^3 + 10\pi \cos 10\pi t + \frac{27}{1000} \\ \left(\frac{502}{5} + t + 40t^2\right) \sin 10\pi t + \frac{12657}{1250}t + \frac{8}{125}t^2 + \frac{101}{25}t^3 + 10\pi \cos 10\pi t + \frac{8}{125} \end{pmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{10}\right], \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} v(0) + \begin{pmatrix} \frac{101}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{26}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{109}{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{25} \end{pmatrix} v(T) = \begin{pmatrix} \frac{101}{1000000} \\ \frac{13}{15625} \\ \frac{2943}{1000000} \\ \frac{116}{15625} \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^4. \quad (23)$$

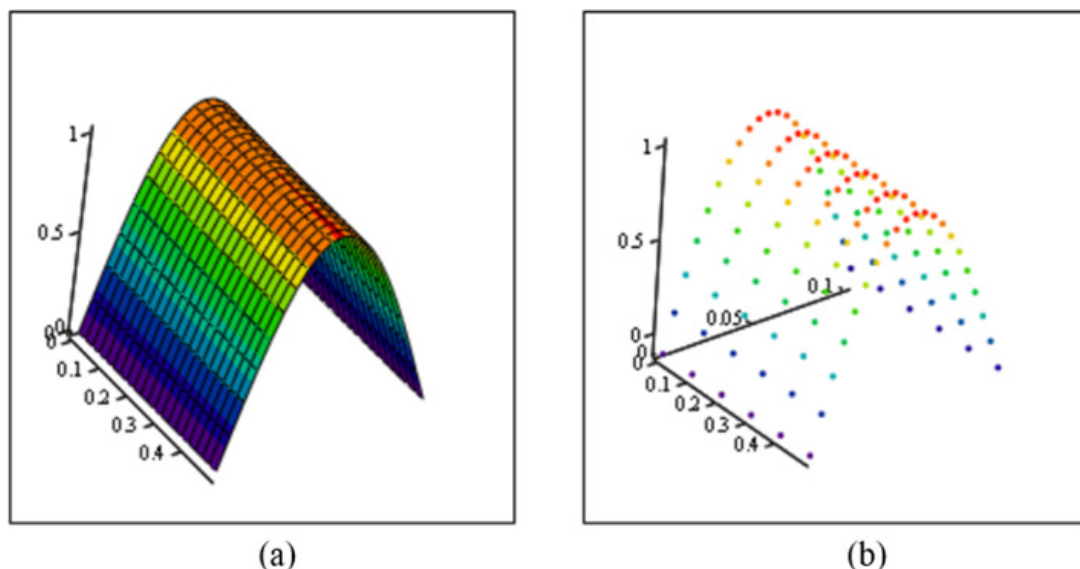
(22), (23) жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есебін шешу үшін профессор Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісін қолданайық. Бұл әдістің схемасы бойынша берілген $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ аралығын ішкі бөліктерге бөлейік: $\left[0, \frac{1}{10}\right] = \bigcup_{s=1}^5 [t_{s-1}, t_s]$, $t_r = 0.02r$, $r = \overline{0,5}$. Жоғарыда келтірілген алгоритм бойынша (17) жүйесі құрып алып және оны шешіп, $\hbar$ белгісіз параметрлердің сандық мәндерін табамыз:

$$\hbar_1^{\tilde{\hbar}} = \begin{pmatrix} 0.0000046001 \\ -0.0000009345 \\ -0.0000006538 \\ 0.0000013315 \end{pmatrix}, \quad \hbar_2^{\tilde{\hbar}} = \begin{pmatrix} 0.5878035076 \\ 0.5879467871 \\ 0.5883267026 \\ 0.5890633566 \end{pmatrix},$$

$$\hbar_3^{\tilde{\hbar}} = \begin{pmatrix} 0.9510928802 \\ 0.9513787546 \\ 0.9521387525 \\ 0.9536128517 \end{pmatrix}, \quad \hbar_4^{\tilde{\hbar}} = \begin{pmatrix} 0.9511125395 \\ 0.951538779 \\ 0.9526787843 \\ 0.954892513 \end{pmatrix}, \quad \hbar_5^{\tilde{\hbar}} = \begin{pmatrix} 0.5878624992 \\ 0.5884267438 \\ 0.5899467493 \\ 0.5929024768 \end{pmatrix}.$$

(22) – (23) есептің шешімінің ішкі аралықтардың қалған нүктелеріндегі жуық мәндерін (18) Коши есептерін шешу арқылы табамыз. Онда $\tilde{u}(t_j^{\tilde{\hbar}}, s\tau) = \tilde{v}_s^{\tilde{\hbar}}(t_j^{\tilde{\hbar}})$, $s = \overline{1,4}$, $j = \overline{0,50}$, $\tau = 0.1$, параболалық теңдеу үшін (19) – (21) қойылған шеттік есептің сандық шешімі болады.

Параболалық теңдеу үшін қойылған (19) – (21) шеттік есебінің $u^*(t, x)$ дәл шешімі мен табылған $\tilde{u}(t, x)$ сандық шешімдерінің сызбасы 1-суретте көрсетілген.



Сурет 1 – (19) – (21) есебінің дәл шешімі (a) мен сандық шешімдерінің (b) сызбасы

Параболалық теңдеу үшін қойылған (19) – (21) шеттік есебінің $u^*(t, x)$ дәл шешімі мен табылған $\tilde{u}(t, x)$ сандық шешімдері үшін келесі бағалау орынды:

$$\max_{j=0,50, i=1,4} \|u^*(t_j, x_i) - \tilde{u}(t_j, x_i)\| < 0.000005$$

Қорытынды

Бұл жұмыста параболалық теңдеу үшін қойылған сызықтық шеттік есеп қарастырылды. x айнымалысы бойынша қандай да бір қадаммен дискреттеу жүргізіліп, қарастырылып отырған есеп жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есепке келтірілді. Параметрлеу әдісі негізінде келтірілген екі нүктелі шеттік есептің сандық шешімін табу алгоритмі құрылды. Құрылған алгоритм бойынша параболалық теңдеу үшін сызықтық шеттік есептің сандық шешімі табылды.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеуге Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант BR20281002).

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1 Tikhonov A.N., Samarskii A.A.. Equations of mathematical physics. – New York: Dover Publications, 2011.
- 2 Vasudeva Murthy A.S., Verwer J.G. Solving parabolic integro-differential equations by an explicit integration method // J. Comput. Appl. Math. – 1992. – Vol. 39. – P. 121–132. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(92\)90229-Q](https://doi.org/10.1016/0377-0427(92)90229-Q).
- 3 Day W.A. A decreasing property of solutions of parabolic equations with applications to thermoelasticity // Quart. Appl. Math. – 1983. – Vol. 40. – P. 468–475. <https://doi.org/10.1090/qam/693879>.
- 4 Bouziani A. Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation // J. Appl. Math. Stoch. Anal. – 1996. – Vol. 9. – P. 323–330.
- 5 Vladimirov V.S., Yankovsky E. A collection of problems on the equations of mathematical physics. – Germany: Springer-Verlag, 1986.
- 6 Trynin A.Y. On a method for solving a mixed boundary value problem for a parabolic equation using modified sinc-approximation operators // Comput. Math. and Math. Phys. – 2023. – Vol. 63. – P. 1264–1284. <https://doi.org/10.1134/S0965542523050159>.
- 7 Dehghan M. Numerical solution of a parabolic equation with non-local boundary specification // Appl. Math. Comput. – 2003. – Vol. 145. – P. 185–194. [https://doi.org/10.1016/s0096-3003\(02\)00479-4](https://doi.org/10.1016/s0096-3003(02)00479-4).
- 8 Dalabaev U., Hasanova D. Construction of an approximate-analytical solution for boundary value problems of a parabolic equation // Mathematics and Computer Science. – 2023. – Vol. 8. – P. 39–45. <https://doi.org/0.11648/j.mcs.20230802.11>.
- 9 Colton D. The solution of initial-boundary value problems for parabolic equations by the method of integral operators // Journal of Differential Equations. – 1977. – Vol. 26. – P. 181–190.
- 10 Джумабаев Д.С. Обоснование метода ломаных для одной краевой задачи линейного параболического уравнения // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1983. – № 1. – С. 8–11.
- 11 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Об оценках решений и их производных краевой задачи для параболического уравнения // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физико-математическая. – 2000. – № 5. – С.3–8.
- 12 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type // News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. – 2019. – Vol. 6. – P.14–24.
- 13 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // USSR Comput.Math. Math. Phys. – 1989. – Vol. 29. – P. 34–46.

- 14 Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – Vol. 294. – P. 342–357. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2015.08.023>
- 15 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Math. Methods Appl. Sci. – 2020. – Vol. 4. – P. 1788–1802. <https://doi.org/10.1002/mma.6003>.
- 16 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. A Problem with parameter for the integrodifferential equations // Math. Model. Anal. – 2021. – Vol. 26. – P. 34–54. <https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977>.
- 17 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M., Uteshova R.E. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations // Comput. Appl. Math. – 2020. – Vol. 39. Art. 248. <https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298-1>.
- 18 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 37. – P. 4966–4976. <https://doi.org/10.1007/s40314-018-0611-9>.
- 19 Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S., Kabdrakhova S.S. On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem // Lobachevskii journal of mathematics. – 2021. – Vol. 42. – P. 606–612. <https://doi.org/10.1134/S1995080221030173>.
- 20 Iskakova N.B., Temesheva S.M., Uteshova R.E. On a problem for a delay differential equations // Math. Meth. Appl. Sci. – 2023. – Vol. 46. – P. 11283–11297. <https://doi.org/10.1002/mma.9181>.
- 21 Bakirova E.A., Iskakova N.B., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter // KazNU Bulletin. – 2023. – Vol. 119. – P. 19–29. <https://doi.org/10.26577/JMMCS2023v119i3a2>.
- 22 Бакирова Э.А., Исакова Н.Б., Темешева С.М., Кадирбаева Ж.М. Параметрі бар дифференціальдық теңдеуі үшін шеттік есептің бірімәнді шешілімділігі туралы // ҚБТУ Хабаршысы. – 2024. – Vol. 68. – P. 64–74. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-1-64-74>.
- 23 Kadirbayeva Zh.M., Bakirova E.A., Tleulesova A.B. Solving Fredholm integro-differential equations involving integral condition: A new numerical method // Mathematica Slovaca. – 2024. – Vol. 74. – P. 403–416. <https://doi.org/10.1515/ms-2024-0031>.
- 24 Kadirbayeva Zh.M., Kabdrakhova S.S. A numerical solution of problem for essentially loaded differential equations with an integro-multipoint condition // Open Math. – 2022. – Vol. 20. – P. 1173–1183. <https://doi.org/10.1515/math-2022-0496>.

REFERENCES

- 1 Tikhonov A.N., Samarskii A.A. (2011) Equations of mathematical physics, Dover Publications, New York.
- 2 Vasudeva Murthy A.S., Verwer J.G. (1992) J. Comput. Appl. Math., vol 39, pp. 121–132. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(92\)90229-Q](https://doi.org/10.1016/0377-0427(92)90229-Q)
- 3 Day W.A. (1983) Quart. Appl. Math., vol. 40, pp. 468–475. <https://doi.org/10.1090/qam/693879>
- 4 Bouziani A. (1996) J. Appl. Math. Stoch. Anal. Vol. 9, pp. 323–330.
- 5 Vladimirov V.S., Yankovsky E. (1986) A collection of problems on the equations of mathematical physics, Springer-Verlag, Germany.
- 6 Trynin A.Y. Comput. (2023) Math. and Math. Phys., vol. 63, pp. 1264–1284. <https://doi.org/10.1134/S0965542523050159>.
- 7 Dehghan M. (2003). Appl. Math. Comput., vol. 145, pp. 185–194. [https://doi.org/10.1016/s0096-3003\(02\)00479-4](https://doi.org/10.1016/s0096-3003(02)00479-4).
- 8 Dalabaev U., Hasanova D. (2023) Mathematics and Computer Science, vol. 8, pp. 39–45 <https://doi.org/10.11648/j.mcs.20230802.11>.
- 9 Colton D. (1977) Journal of Differential Equations, vol. 26, pp. 181–190.
- 10 Dzhumabaev D.S. (1983) Izvestiya AN KazSSR. Seriya fiz.-matem., no. 1, pp. 8–11 [in Russian].
- 11 Assanova A.T., Dzhumabaev D.S. (2000) Izvestiya MON RK, NAN RK. Seriya fiz.-matem., no. 5, pp. 3–8 [in Russian].
- 12 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Kadirbayeva Zh.M. (2019) News of the NAS RK. Phys.-Math. Series, vol. 6, pp. 14–24.
- 13 Dzhumabayev D.S. (1989) USSR Comput. Math. Math. Phys., vol. 29, pp. 34–46.

- 14 Dzhumabaev D.S. (2016) J. Comput. Appl. Math., vol. 294, pp. 342–357. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2015.08.023>.
- 15 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. and Mynbayeva S.T. (2020) Math. Methods Appl. Sci., vol. 4, pp. 1788–1802. <https://doi.org/10.1002/mma.6003>.
- 16 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Kadirbayeva Zh.M. (2021) Math. Model. Anal., vol. 26, pp. 34–54. <https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977>.
- 17 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. and Uteshova R.E. (2020). Comput. Appl. Math., vol. 39, pp. 248. <https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298-1>.
- 18 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. (2018) Comput. Appl. Math., vol. 37, pp. 4966–4976. <https://doi.org/10.1007/s40314-018-0611-9>.
- 19 Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S. and Kabdrakhova S.S. (2021) Lobachevskii journal of mathematics, vol. 42, pp. 606–612. <https://doi.org/10.1134/S1995080221030173>.
- 20 Iskakova N.B., Temesheva S.M. and Uteshova R.E. (2023). Math. Meth. Appl. Sci., vol. 46, pp. 11283–11297. <https://doi.org/10.1002/mma.9181>.
- 21 Bakirova E.A., Iskakova N.B. and Kadirbayeva Zh.M. (2023) KazNU Bulletin, vol. 119, pp. 19–29. <https://doi.org/10.26577/JMMCS2023v119i3a2>.
- 22 Bakirova E.A., Iskakova N.B., Temesheva S.M. and Kadirbayeva Zh.M. (2024) KBTU Khabarshysy, vol. 68, pp. 64–74. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-1-64-74> (in Kazakh).
- 23 Kadirbayeva Zh.M., Bakirova E.A. and Tleulesova A.B. (2024). Mathematica Slovaca, vol. 74, pp. 403–416. <https://doi.org/10.1515/ms-2024-0031>.
- 24 Kadirbayeva Zh.M. and Kabdrakhova S.S. (2022) Open Math., vol. 20, pp. 1173–1183. <https://doi.org/10.1515/math-2022-0496>.

^{1,2}Iskakova N.B.,

Candidate of Phys.-Math.Sc., Leading Researcher, ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,
*e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3,4}Kadirbayeva Zh.M.,

Candidate of Phys.-Math.Sc., Leading Researcher, ORCID ID: 0000-0001-8861-4100,
e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

^{1,3}Bakirova E.A.,

Candidate of Phys.-Math.Sc., Leading Researcher, ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,
e-mail: bakirova1974@mail.ru

²Kuanysh S.K.,

Doctoral student, Teacher, ORCID ID: 0009-0006-0975-1662,
e-mail: saule270898@gmail.com

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, 050040, Almaty, Kazakhstan

³Kazakh National Women's Teacher Training University, 050000, Almaty, Kazakhstan

⁴International Information Technology University, 050000, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE PARABOLIC EQUATION

Abstract

A linear boundary value problem for a parabolic equation is considered in a closed domain. Based on the broken line method, the boundary value problem for a parabolic equation is replaced by a two-point boundary value problem for a system of linear ordinary differential equations by discretizing the unknown function $u(t, x)$ with respect to the variable x . The obtained two-point boundary value problem is investigated by the parameterization method of Professor Dzhumabaev. Based on this method, an algorithm for finding a numerical solution to the two-point boundary value problem for a system of linear ordinary differential equations is constructed. The

constructed algorithm is realized by applying known numerical methods. The constructiveness and efficiency of the parameterization method also allows us to construct a numerical solution of the considered linear boundary value problem for the parabolic equation. One numerical example is given to verify and illustrate the proposed algorithm.

Key words: Parabolic equation, boundary value problem, algorithm, numerical solution, parameterization method.

^{1,2}**Искакова Н.Б.,**

к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ORCID ID: 0000-0002-0680-4099,
*e-mail: narkesh77@gmail.com

^{1,3,4}**Кадирбаева Ж.М.,**

к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ORCID ID: 0000-0001-8861-4100,
e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

^{1,3}**Бакирова Э.А.,**

к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ORCID ID: 0000-0002-3820-5373,
e-mail: bakirova1974@mail.ru

²**Қуаныш С.Қ.,**

докторант, преподаватель, ORCID ID: 0009-0006-0975-1662,
e-mail: saule270898@gmail.com

¹Институт математики и математического моделирования, 050010, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, 050040, г. Алматы, Казахстан

³Казахский национальный женский педагогический университет, 050000, г. Алматы, Казахстан

⁴Международный университет информационных технологий, 050000, г. Алматы, Казахстан

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация

В замкнутой области рассматривается линейная краевая задача для параболического уравнения. На основе метода ломаных краевая задача для параболического уравнения заменяется двухточечной краевой задачей для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений путем дискретизации неизвестной функции $u(t, x)$ по переменной x . Полученная двухточечная краевая задача исследуется методом параметризации профессора Джумабаева. На основе данного метода строится алгоритм нахождения численного решения для двухточечной краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Построенный алгоритм реализуется путем применения известных численных методов. Конструктивность и эффективность метода параметризации позволяет также построить численное решение рассматриваемой линейной краевой задачи для параболического уравнения. Для проверки и иллюстрации предложенного алгоритма приводится один численный пример.

Ключевые слова: параболическое уравнение, краевая задача, алгоритм, численное решение, метод параметризации.

Мақаланың редакцияға түскен күні: 31.05.2024