УДК 521.1
МРНТИ 30.51.37

ӨСТІК СИММЕТРИЯЛЫ БЕЙСТАЦИОНАР ЕКІ ДЕНЕНІҢ ІЛГЕРІЛЕМЕЛІ – АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

М.ДЖ. МИНГЛИБАЕВ, С.Б. БИЖАНОВА

әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті

Аңдатпа: *Мақалада массалары және өлшемдері айнымалы өзара гравитациялаушы өстік симметриялы бейстационар екі аспан денелерінің ілгерілемелі – айналмалы қозғалысы абсолютті, салыстырмалы және барицентрлік координат жүйелерінде қарастырылды және олардың қозғалысының дифференциалдық теңдеулері қорытылып шығарылды. Бейстационар өстік симметриялы денелердің екінші ретті инерция моменттері айнымалы. Өстік симметриялы денелер үшін меншікті координаталар жүйесінің өстері дененің бас инерция өстерімен сәйкес келеді және бұл күй эволюция барысында өзгеріссіз қалады. Денелердің массасы әртүрлі қарқында изотропты өзгереді. Ньютондық күштік функцияның мәні жуықталған, ол екінші гармоникамен шектелген.*

Түйінді сөздер: *айнымалы масса, өстік симметриялы дене, ілгерілемелі – айналмалы қозғалыс, күштік функция*

DIFFERENTIAL EQUATION OF TRANSLATIONAL – ROTATIONAL MOTION OF TWO NONSTATIONARY AXISYMMETRIC BODIES

Abstract: *In this article we consider translational – rotational motion of two mutually gravitating celestial bodies with variable mass and with variable sizes in absolute and barycentric coordinate systems and their differential equation of motion. The moments of inertia of the second type of axisymmetric bodies are variable. The axes of the own coordinate system for axisymmetric bodies coincide with the main axes of inertia, and this position remains unchanged during evolution. Masses of bodies change isotropic in the different rates. Newtonian interaction force is characterized by an approximate expression of the force function, taking into account the second harmonic.*

Keywords: *variable mass, axisymmetric body, translational – rotational motion, force function*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Аннотация: *В работе получены поступательно-вращательные движения двух взаимогравитирующих небесных тел с переменной массой и с переменными размерами в абсолютной, относительной и барицентрической системе координат и их дифференциальное уравнение движения. Моменты инерции второго порядка осесимметричных тел – переменные. Оси собственной системы координат для нестационарных осесимметричных тел совпадают с главными осями инерции и это положение остается неизменным во время эволюции. Массы тел изменяются изотропно в различных темпах. Ньютоновская сила взаимодействия характеризуется приближенным выражением силовой функции, учитывающей вторую гармонику.*

Ключевые слова: *переменная масса, осесимметричное тело, поступательно-вращательное движение, силовая функция*

1 Кіріспе

Қазіргі бақылау астрономиясы нақты аспан денелерінің абсолютті қатты дене емес – олар бейстационар екендігін көрсетеді. Бұлар уақытқа байланысты массаларын, өлшемін, пішінін, құрылымын өзгертеді [1]-[5]. Классикалық аспан механикасы ғарыштық денелерді материалдық нүкте ретінде қарастырады. Бірақ, бұл болжау есептің табиғи қойылуын кейбір жағдайларда дұрыс бейнелемейді. Өзара Ньютон күшімен әсерлесетін массасы, өлшемі және пішіні айнымалы бейстационар денелердің ілгерілемелі – айналмалы қозғалысы көп жағдайда аспан денелерінің қозғалысын дұрыс айқындайды.

2 Мәселенің физикалық қойылымы. Бейстационар денелердің массалары $m_i = m_i(t)$, пішіндері айнымалы өстік симметриялы динамикалық құрылымды және айнымалы $l_i = l_i(t)$ сызықты өлшеммен сипатталсын [1].

Келесі шарттар орындалсын делік:

1. Денелер бейстационар, екінші ретті инерция моменттері айнымалы

$$A_i(t) = B_i(t) \neq C_i(t), \quad i = 1,2 \tag{2.1}$$

2. $m_i(t), l_i(t), A_i(t), C_i(t)$ – белгілі уақыт функциялары;

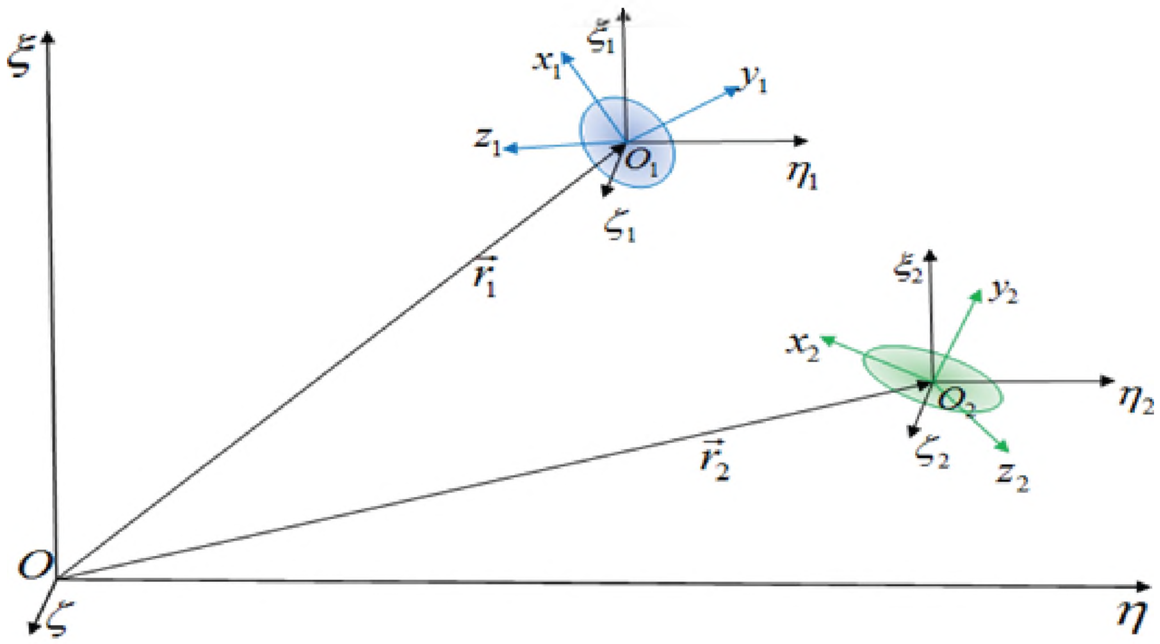
3. Өзіндік координата өстері бас инерция өстерімен сәйкес келеді және бұл жағдай өзгеріссіз қалады;

4. Денелердің массасы мен өлшемі әртүрлі қарқында изотропты түрде өзгереді, сондықтанда қосымша реактивті күш және қосымша айналдырушы момент туындамайды;

$$\frac{\dot m_1(t)}{m_1(t)} \neq \frac{\dot m_2(t)}{m_2(t)}, \qquad \frac{\dot l_1(t)}{l_1(t)} \neq \frac{\dot l_2(t)}{l_2(t)}. \tag{2.2}$$

5. Күштік функцияның жуық өрнегімен шектелеміз.

3 Абсолютті координаталар жүйесіндегі қозғалыстың дифференциалдық теңдеулері. Егер $\hat{I}\,\xi\eta\zeta$ абсолютті координаталар жүйесіндегі $\grave{O}_i$ денелерінің меншікті өстерінің бағыттары сәйкесінше осы денелердің бас инерция өстерімен сәйкес келсе, онда денелердің ілгерілемелі – айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері келесі түрде жазылады [2]



1-сурет. Екі дене абсолютті координаттар жүйесінде

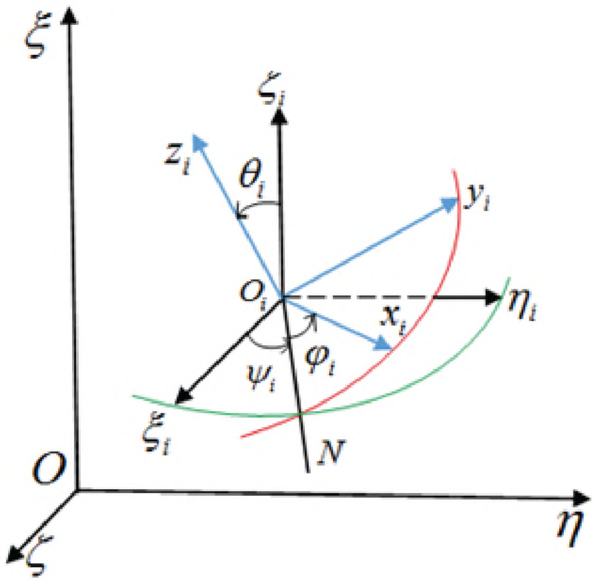
$$m_i(t)\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i},\ m_i(t)\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i},\ m_i(t)\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big(A_i(t)p_i\big) - (A_i(t) - C_i(t))q_i r_i = \frac{\sin\varphi_i}{\sin\theta_i}\left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos\theta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right] + \cos\varphi_i \frac{\partial U}{\partial \theta_i}\\
&\frac{d}{dt}\big(A_i(t)q_i\big) - (C_i(t) - A_i(t))r_i p_i = \frac{\cos\varphi_i}{\sin\theta_i}\left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i} - \cos\theta_i \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right] - \sin\varphi_i \frac{\partial U}{\partial \theta_i}\ ,\\
&\frac{d}{dt}\big(C_i(t)r_i\big) = 0, \qquad i = 1,2
\end{aligned} \quad (3.2)$$

мұндағы m_i, A_i, B_i, C_i – денелердің массалары және бас инерция моменттері; ξ_i, η_i, ζ_i – $O\xi\eta\zeta$ абсолютті өстердегі O_i массалар центрінің декарттық координаталары; p_i, q_i, r_i – денелердің айналмалы қозғалысының бұрыштық жылдамдығының меншікті координата жүйесінің өстеріне проекциялары; U – екі дененің тартылыс күшін анықтайтын күштік функция.

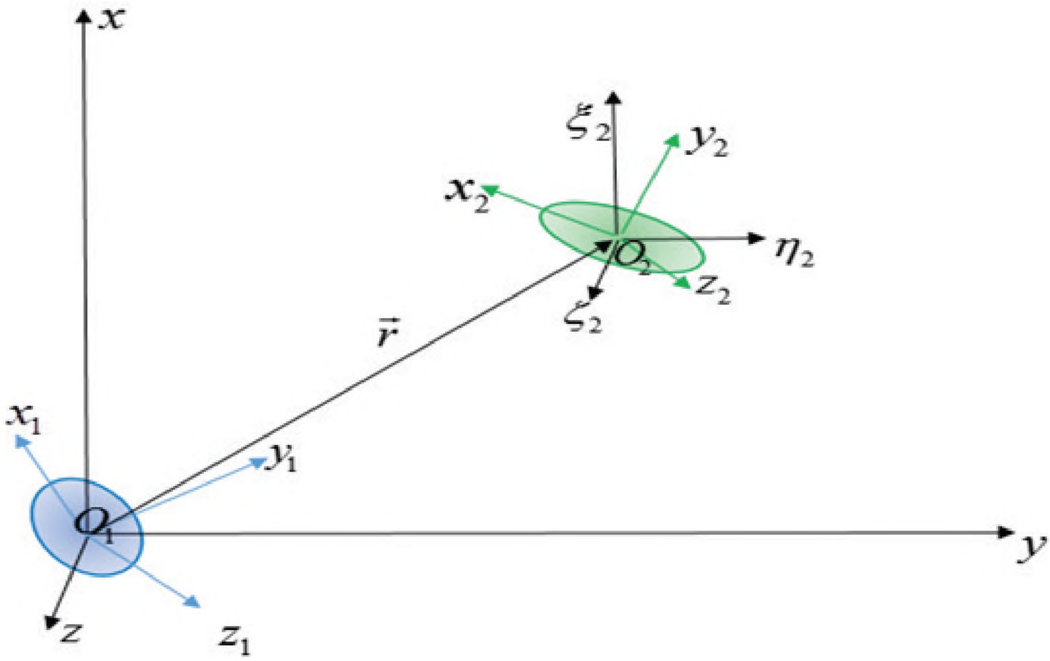
$$p_i = \dot{\psi}_i \sin\varphi_i \sin\theta_i + \dot{\theta}_i \cos\varphi_i, \quad q_i = \dot{\psi}_i \cos\varphi_i \sin\theta_i - \dot{\theta}_i \sin\varphi_i, \quad r_i = \dot{\psi}_i \cos\theta_i + \dot{\varphi}_i\ . \quad (3.3)$$

$\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ – Эйлер бұрыштары; Алынған (3.1) – (3.3) теңдеулер өстік симметриялы бейстационар екі дененің ілгерілемелі – айналмалы қозғалысын абсолют координаталар жүйесінде толық сипаттайды.



2-сурет. Эйлер бұрыштары

4 Салыстырмалы координаталар жүйесіндегі қозғалыстың дифференциалдық теңдеулері. $O\xi\eta\zeta$ абсолютті координаталар жүйесінен O_1xyz салыстырмалы координаталар жүйесіне өтеміз, координаталар басын O_i нүктесінен аламыз. Жаңа жүйенің координаталары ескі жүйенің координаталарына сәйкесінше параллель болсын. Абсолютті координаталар жүйесіндегі (3.1) – (3.3) қозғалыс теңдеулерін ескере отырып, екі өсті дененің ілгерілемелі – айналмалы қозғалыс теңдеулерін O_1xyz салыстырмалы координаталар жүйесінде аламыз [2].



3-сурет. Екі дене салыстырмалы координаттар жүйесінде

$$\mu(t)\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \mu(t)\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \mu(t)\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(A_i(t)p_i\right) - (A_i(t) - C_i(t))q_i r_i = \frac{\sin\varphi_i}{\sin\theta_i}\left[\frac{\partial U}{\partial\psi_i} - \cos\theta_i\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right] + \cos\varphi_i\frac{\partial U}{\partial\theta_i}\\
&\frac{d}{dt}\left(A_i(t)q_i\right) - (C_i(t) - A_i(t))r_i p_i = \frac{\cos\varphi_i}{\sin\theta_i}\left[\frac{\partial U}{\partial\psi_i} - \cos\theta_i\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right] - \sin\varphi_i\frac{\partial U}{\partial\theta_i},\\
&\frac{d}{dt}\left(C_i(t)r_i\right) = 0, \qquad i = 1,2
\end{aligned} \tag{4.2}$$

мұндағы $\mu(t) = m_1(t)m_2(t) / \left(m_1(t) + m_2(t)\right)$ келтірілген масса, U – екі дененің тартылыс күшін анықтайтын күштік функция.

5 Барицентрлік координаталар жүйесіндегі өстік симметриялы бейстационар екі дененің ілгерілемелі – айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері.

Дененің ілгерілемелі қозғалыс теңдеуі барицентрлік координаттар жүйесінде келесідей болады [3]

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -f\frac{m_2^3(t)}{(m_1(t) + m_2(t))^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - 2\frac{\dot{\nu}_2}{\nu_2}\dot{\vec{r}}_1 - \frac{\ddot{\nu}_2}{\nu_2}\vec{r}_1 + grad_{\vec{r}_1}U_1, \tag{5.1}$$

$$\nu_2 = \frac{m_1(t) + m_2(t)}{m_2(t)} = \nu_2(t), \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(A_1(t)p_1\right)-(A_1(t)-C_1(t))q_1r_1=\frac{\sin\varphi_1}{\sin\theta_1}\left[\frac{\partial U_1}{\partial\psi_1}-\cos\theta_1\frac{\partial U_1}{\partial\varphi_1}\right]+\cos\varphi_1\frac{\partial U_1}{\partial\theta_1}\\
&\frac{d}{dt}\left(A_1(t)q_1\right)-(C_1(t)-A_1(t))r_1p_1=\frac{\cos\varphi_1}{\sin\theta_1}\left[\frac{\partial U_1}{\partial\psi_1}-\cos\theta_1\frac{\partial U_1}{\partial\varphi_1}\right]-\sin\varphi_1\frac{\partial U_1}{\partial\theta_1},\\
&\frac{d}{dt}\left(C_1(t)r_1\right)=\frac{\partial U_1}{\partial\varphi_1}=0,
\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$U_1=f\frac{m_2^4(t)}{(m_1(t)+m_2(t))^4}\frac{\left(C_2(t)-A_2(t)\right)\left(1-3\gamma_2^2\right)}{2r_1^3}+\frac{fm_2^5(t)}{m_1(t)(m_1(t)+m_2(t))^4}\frac{\left(C_1(t)-A_1(t)\right)\left(1-3\gamma_1^2\right)}{2r_1^3},\tag{5.4}$$

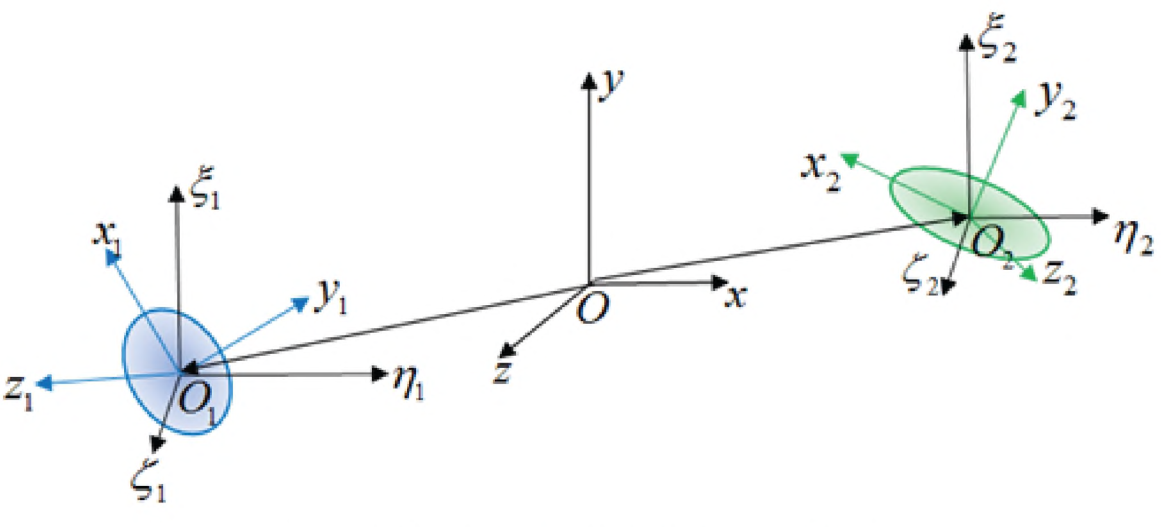
Екінші дененің ілгерілемелі қозғалыс теңдеуі барицентрлік координаттар жүйесінде келесідей болады

$$\ddot{\vec{r}}_2=-f\frac{m_1^3(t)}{(m_1(t)+m_2(t))^2}\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}-2\frac{\dot{\nu}_1}{\nu_1}\dot{\vec{r}}_2-\frac{\ddot{\nu}_1}{\nu_1}\dot{\vec{r}}_2+grad_{\vec{r}_2}U_2,\tag{5.5}$$

$$\nu_1=\frac{m_1(t)+m_2(t)}{m_1(t)}=\nu_1(t),\tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(A_2(t)p_2\right)-(A_2(t)-C_2(t))q_2r_2=\frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta_2}\left[\frac{\partial U_2}{\partial\psi_2}-\cos\theta_2\frac{\partial U_2}{\partial\varphi_2}\right]+\cos\varphi_2\frac{\partial U_2}{\partial\theta_2}\\
&\frac{d}{dt}\left(A_2(t)q_2\right)-(C_2(t)-A_2(t))r_2p_2=\frac{\cos\varphi_2}{\sin\theta_2}\left[\frac{\partial U_2}{\partial\psi_2}-\cos\theta_2\frac{\partial U_2}{\partial\varphi_2}\right]-\sin\varphi_2\frac{\partial U_2}{\partial\theta_2},\\
&\frac{d}{dt}\left(C_2(t)r_2\right)=\frac{\partial U_2}{\partial\varphi_2}=0,
\end{aligned}\tag{5.7}$$

$$U_2=f\frac{m_1^5(t)}{m_2(t)(m_1(t)+m_2(t))^4}\frac{\left(C_2(t)-A_2(t)\right)\left(1-3\gamma_2^2\right)}{2r_2^3}+\frac{fm_1^4(t)}{(m_1(t)+m_2(t))^4}\frac{\left(C_1(t)-A_1(t)\right)\left(1-3\gamma_1^2\right)}{2r_2^3}.\tag{5.8}$$



4-сурет. Екі дене барицентрлік координаттар жүйесінде

6 Ньютон заңымен өзара әсерлесуші өстік симметриялы бейстационар екі дененің күштік функциясы. Өзара әсерлесуші T_1 және T_2 денелердің күштік функциясын U арқылы белгілейміз. Жалпы жағдайда күштік функцияның өрнегі мына түрде беріледі

$$U = f \int_{(T_1)} \int_{(T_2)} \frac{dm_1 dm_2}{\Delta}, \qquad (6.1)$$

мұндағы U – жалпы жағдайда, он екі айнымалыға $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \varphi_1, \psi_1, \theta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \varphi_2, \psi_2, \theta_2)$ тәуелді күштік функция, Δ – dm_1 және dm_2 элементар массаларының өзара арақашықтығы. Осы жұмыста күштік функцияның мына жуық өрнегімен шектелеміз

$$U \approx f\frac{m_1(t)m_2(t)}{r} + fm_1\frac{2A_2(t)+C_2(t)-3J_2}{2r^3} + fm_2(t)\frac{2A_1(t)+C_1(t)-3J_1}{2r^3}, \qquad (6.2)$$

$$J_i = A_i\left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right) + C_i\gamma_i^2, \quad i = 1,2 \qquad (6.3)$$

J_i – екі өстік симметриялы дененің инерция центрін қосатын $\overline{O_1O_2}$ түзуіне қатысты T_i денелердің инерция моменттері

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – $\overline{O_1O_2}$ түзуін T_i денелердің бас инерция өстеріне байланысты бағыттауыш косинустары

$$\begin{aligned} \alpha_i &= c_{11}^{(i)}\frac{x}{r} + c_{21}^{(i)}\frac{y}{r} + c_{31}^{(i)}\frac{z}{r} \\ \beta_i &= c_{12}^{(i)}\frac{x}{r} + c_{22}^{(i)}\frac{y}{r} + c_{32}^{(i)}\frac{z}{r}, \\ \gamma_i &= c_{13}^{(i)}\frac{x}{r} + c_{23}^{(i)}\frac{y}{r} + c_{33}^{(i)}\frac{z}{r} \end{aligned} \qquad (6.4)$$

$x/r, y/r, z/r$ – $O_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ координаттар жүйесінің айналмайтын өстеріне қатысты $\vec{r}$ векторының бағыттауыш косинустары

$c_{k\vartheta}^{(i)}$ – қозғалмалы және қозғалмайтын координаттар жүйелерінің арасындағы бұрыштардың косинустары. Ары қарай бізге қажетті шамалар төмендегіше

$$\begin{aligned} c_{13}^{i} &= \sin\psi_i \sin\theta_i = \cos(\vec{Oz_i} \wedge \vec{O\xi_i}), \\ c_{23}^{i} &= -\cos\psi_i \sin\theta_i = \cos(\vec{Oz_i} \wedge \vec{O\eta_i}), \\ c_{33}^{i} &= \cos\theta_i = \cos(\vec{Oz_i} \wedge \vec{O\zeta_i}). \end{aligned} \qquad (6.5)$$

Сонымен, өстік симметриялы бейстационар екі дененің қозғалысын күштік функцияның жуық өрнегін есепке ала отырып зерттейміз.

Қорытынды

Абсолютті, салыстырмалы және барицентрлік координат жүйелерінде өстік симметриялы бейстационар екі дененің ілгерілемелі – айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері алынды. Ньютон заңымен өзара әсерлесуші өстік симметриялы бейстационар екі дененің күштік функциясының жуық аналитикалық өрнектері көрсетілді. Алынған нәтижелер ғарыштағы бейстационар екі дененің ілгерілемелі – айналмалы қозғалысын зерттеуге мүмкіндік береді. Алынған дифференциалдық теңдеулердің негізінде ары қарай ұйытқу теориясын [1,5] пайдаланып, Белецкий – Черноусько айнымалыларында қос жүйенің динамикалық эволюциясын зерттеу жоспарлануда.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. – Германия: Изд. «LAP LAMBERT Academic Publishing », 2012. – 229 с.
2. Минглибаев М.Дж., Байсбаева О.Б. Вековые возмущения в задаче о поступательно-вращательном движении двух нестационарных тел: шар – осесимметричное тело // Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика 01(76), 2013. – С. 71-81.
3. Minglibayev M.Zh., Ahmetrassulova A.A. Secular perturbations in the problem of translational – rotational motion two axisymmetric non – stationary gravitating bodies with variable oblate // CCMECH7. 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics. Selected Papers – Poland, Siedlce: Wydawnictwo Colleguim Mazovia, October 23-28, 2012. - pp. 116-127.
4. Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. – Москва: Наука, 1975. – 799 с.
5. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. – Москва, Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.