

УДК 517.958:536.2, 539.4.  
МРНТИ 30.19.15

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-181-192>

<sup>1,2,3</sup>**Айнакеева Н.Ж.,**

докторант, ORCID ID: 0000-0003-4643-6072, e-mail: nursaule\_math@mail.ru

<sup>1</sup>Институт механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова,  
050010, г. Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
050040, г. Алматы, Казахстан

<sup>3</sup>Университет Нархоз, 050035, г. Алматы, Казахстан

## **ДИНАМИКА ТЕРМОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ И СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

### **Аннотация**

Стержневые элементы широко используются в самых разных областях техники. Временные изменения температурного поля вызывают в стержневых конструкциях временно изменяющееся поле напряжений, что влияет на их прочность и надежность в эксплуатации. Определение термонапряженного состояния стержневых конструкций с учетом их механических свойств, таких как упругость, является одной из актуальных научно-технических задач. Применение методов математического моделирования позволяет исследовать термодинамические процессы, происходящие в конструкции и ее элементах, и определять их динамические и прочностные характеристики на этапе проектирования. В данной работе рассматривается задача Коши для динамики термоупругого стержня при произвольных начальных условиях, а также при силовых и тепловых воздействиях. С помощью тензора Грина уравнений термоупругости было получено аналитическое решение задачи, позволяющее определить деформации, напряжения и температуру в любом сечении стержня и в любой момент времени, если известны его начальное состояние и действующие силовые и тепловые источники. Приведены численные расчеты температуры, перемещений при действии импульсных сосредоточенных силовых и тепловых источников. Проведены расчеты решения задач Коши при действии распределенных вдоль стержня силовых и тепловых источников регулярного вида. Разработанная программа позволяет исследовать термодинамические процессы в стержнях с различными физико-механическими параметрами при действии тепловых и силовых источников как распределенных, так и сосредоточенных и импульсных, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

**Ключевые слова:** термоупругий стержень, температура, перемещение, напряжение, метод обобщенных функций, тензор Грина.

### **Введение**

Развитие теории и методов решения задач термоупругости обусловлено потребностями множества отраслей техники и прикладных наук. Такие задачи возникают при разработке новых конструкций паровых и газовых турбин, реактивных и ракетных двигателей, высокоскоростных самолетов, ядерных реакторов и месторождений полезных ископаемых в горной промышленности. Элементы этих конструкций работают в условиях неравномерного и нестационарного нагрева, что приводит к изменению механических свойств материалов и появлению температурных градиентов, вызывающих неодинаковое тепловое расширение различных частей конструкций [1–8]. Некоторые материалы при быстром возникновении напряжений из-за резкого градиента нестационарного температурного поля становятся хрупкими и не выдерживают теплового удара. Повторное воздействие тепловых напряжений может привести к разрушению элементов конструкции, поэтому изучение влияния температурного поля на напряженно-деформированное состояние сооружений и конструкций является крайне актуальной задачей.

Стержневые элементы широко применяются в самых различных областях техники. Можно привести множество примеров нагруженных стержневых элементов конструкций, таких как опоры различных сооружений, зданий, мостов и т.д. В реальных условиях на стержни могут действовать динамические нагрузки, вызывающие колебания, которые могут значительно влиять на надежность стержневых элементов и, следовательно, на надежность всей конструкции. Неустановившееся температурное поле вызывает в стержневых конструкциях изменяющееся со временем поле деформаций, что влияет на их прочность и надежность в процессе эксплуатации.

Определение термонапряженного состояния стержневых конструкций с учетом их механических свойств (особенно упругости) является одной из актуальных научно-технических задач. Использование методов математического моделирования позволяет исследовать физические процессы, происходящие в конструкциях и их элементах, и определять их динамические характеристики на этапе проектирования. Эти характеристики, в свою очередь, служат основой для прогнозирования поведения изделия в заданных условиях эксплуатации.

Здесь разработана методика определения термодинамических характеристик термоупругого стержня при действии различных силовых и тепловых источников с учетом его физико-механических свойств и начального состояния.

### Основные положения

#### 1 Постановка задачи Коши для уравнений несвязанной термоупругости

Формулируется задача Коши для уравнений несвязанной термоупругости, применительно к термоупругому стержню. Уравнения состояния этого стержня выражаются следующим образом [9, 10]:

$$\begin{cases} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x, t) = 0 \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} + F_2(x, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in R^1, t \geq 0$ . Здесь  $\rho$  – плотность массы,  $c$  – скорость распространения упругих волн в стержне,  $\gamma$  – коэффициент теплопроводности,  $\kappa = \frac{k}{\rho c}$  – коэффициент температуропроводности,  $u(x, t)$  – продольные перемещения сечений стержня,  $\theta(x, t)$  – относительная температура,  $F_1(x, t)$  – продольная компонента внешней силы на единицу длины;  $F_2(x, t)$  – величина, характеризующая мощность теплового источника. Здесь и далее частные производные обозначены:  $u_1 = u$ ,  $u_2 = \theta$ ,  $u_{,x} = \partial_x u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}$ ,  $u_{,t} = \partial_t u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$  ( $i = 1, 2$ ).

Термоупругое напряжение в стержне определяется соотношением Дюамеля-Неймана:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta \quad (2)$$

Начальные условия известны:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_{,t}(x, 0) = v_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \\ u_0(x) \in C^2(R^1), \theta_0(x) \in C^2(R^1), v_0(x) \in C^2(R^1), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C^n(R^1)$  пространство дифференцируемых до  $n$ -го порядка функций на  $R^1$ .

Исследуется задача начальных значений, при решении которой можно определить состояние стержня в произвольный момент времени, если известны его начальное состояние и воздействующие силовые и тепловые источники.

Необходимо найти решения уравнений (1) с начальными условиями (3), которые соответствуют условиям излучения.

$$u(x, t) \rightarrow 0, \theta(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad \forall t \quad (4)$$

при воздействии произвольных сил и тепловых источников:  $F_j(x, t) = L_j(R^1)$ , при  $j = 1, 2$ .

## 2 Постановка задачи Коши в пространстве обобщенных функций

Для решения задачи применяем метод, разработанный Владимировым В.С. для задачи Коши для волновых уравнений [11, 12]. Вводятся следующие регулярные обобщенные функции, определенные на  $R^2$ :

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t)H(t), \quad \hat{\theta}(x, t) = \theta(x, t)H(t), \quad \hat{F}_j(x, t) = F_j(x, t)H(t), \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

где  $u(x, t)$ ,  $\theta(x, t)$  – решение задачи Коши,  $H(t)$  – функция Хевисайда:  $H(t)=1$  при  $t>0$ ,  $H(t)=0$  при  $t<0$ . То есть доопределяем нулем решение задачи Коши вне области определения (при  $t<0$ ). И рассмотрим действие дифференциального оператора системы (1) на эти функции в пространстве обобщенных функций  $D'(R^2)$  [11, 12].

Для этого вначале найдем обобщенные производные этих функций:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} H(t) + u_0(x)\delta(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} H(t) + v_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t),$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} H(t) + \theta_0(x)\delta(t),$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} H(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} H(t), \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} H(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} H(t),$$

Здесь  $\delta(t)$  – сингулярная  $\delta$  – функция. Тогда система (1) в  $D'(R^2)$  примет вид:

$$c^2 \hat{u}_{,xx} - \hat{u}_{,tt} - \tilde{\gamma} \hat{\theta}_{,x} + F_1(x, t)H(t) = -v_0(x)\delta(t) - u_0(x)\delta'(t),$$

$$\hat{\theta}_{,xx} - \kappa^{-1} \hat{\theta}_{,t} + F_2(x, t)H(t) = \kappa^{-1} \theta_0(x)\delta(t), \quad (6)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho}.$$

В эти уравнения начальные условия включены как сингулярные массовые силы и тепловые источники. Далее обозначим

$$\hat{F}_1(x, t) = F_1(x, t)H(t), \quad \hat{F}_2(x, t) = F_2(x, t)H(t). \quad (7)$$

$$\hat{G}_1(x, t) = \hat{F}_1(x, t) + v_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)$$

$$\hat{G}_2(x, t) = \hat{F}_2(x, t) - \kappa^{-1} \theta_0(x)\delta(t)$$

Решение этой задачи в пространстве обобщенных функций выражается через тензорно-функциональную свертку(\*):

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, t) &= u(x, t)H(t) = \hat{U}_1^k(x, t) * \hat{G}_k(x, t), \\ \hat{\theta}(x, t) &= \theta(x, t)H(t) = \hat{U}_2^k(x, t) * \hat{G}_k(x, t), \quad k = 1, 2.\end{aligned}\quad (8)$$

Где  $\hat{U}_j^k(x, t)$  – тензор Грина уравнений (1), который описывает термоупругие волны, порождаемые сосредоточенными импульсными источниками. Всюду по одноименным индексам в произведении суммирование от 1 до 2 (тензорная свертка).

Как известно, в теории обобщенных функций решение дифференциальных уравнений единственно в алгебре свертки с тензором Грина этих уравнений.

### 3 Тензор Грина уравнений несвязанной термоупругости

Тензор Грина  $U_i^j(x, t)$  – это матрица фундаментальных решений системы уравнений (1), возникающих при действии импульсной сосредоточенной силы и теплового источника определенного вида:

$$F_1 = \delta(x)\delta(t)\delta_1^j, \quad F_2 = \delta(x)\delta(t)\delta_2^j, \quad j = 1, 2 \quad (9)$$

где  $\delta_i^j$  – символ Кронекера. При  $j=1$  действует силовой источник. При  $j=2$  действует тепловой источник. Тензор Грина удовлетворяет следующим условиям излучения:

$$\begin{aligned}U_i^j(x, t) &= 0, \quad t < 0, \\ U_i^j(x, t) &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \text{ для } \forall x \in R^1, \\ U_i^j(x, t) &\rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \text{ для } \forall t > 0\end{aligned}\quad (10)$$

Построен тензор Грина, который имеет следующий вид (вывод тензора см. [13, 14]) :

$$\begin{aligned}U_1^j(x, t) &= \delta_1^j k^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \delta_1^j \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} - \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} - \delta_1^j \Sigma_3(t) \delta(x) + \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x}, \\ U_2^1 &= 0, \quad U_2^2 = c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2}, \quad j = 1; 2 \\ \Sigma_1(x, t) &= \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[ \frac{k}{c^2} \left( 1 - e^{\frac{c}{k}(|x| - ct)} \right) + t - \frac{|x|}{c} \right], \\ \Sigma_2(x, t) &= AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\}, \quad \Sigma_3(x, t) = -\frac{k}{c^2} H(t) \left( e^{-\frac{c^2}{k}t} - 1 \right), \\ \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} &= -\frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[ e^{\frac{c}{k}(|x| - ct)} - 1 \right], \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} = \frac{k}{c^2} H(ct - |x|) \operatorname{sgn} x \left[ e^{\frac{c}{k}(|x| - ct)} + 1 \right],\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} &= -\frac{AH(t)}{k} \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2\tau} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2\tau} d\tau \right\}, \\ \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} &= \left( -\frac{k}{c^2} \delta(ct - |x|) + \frac{2k}{c^2} H(ct - |x|) \delta(x) \right) \left[ e^{\frac{c}{k}(|x| - ct)} + 1 \right] + \frac{1}{c} H(ct - |x|) e^{\frac{c}{k}(|x| - ct)}, \\ \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} &= AH(t) \left\{ \frac{c^4}{k^2} e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \right\} - \\ &\quad - AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4kt}}}{k\sqrt{t}} \left( c^2 - \frac{x^2}{4t^2} \right) + \frac{x^2}{4kt^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right\}, \\ \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} &= \frac{AH(t)}{2k} \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \left[ \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} \left( \frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right] - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} \left( \frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right\}.\end{aligned}$$

Зная тензор Грина, можно построить решение системы (7) для любых источников в виде тензорно-функциональной свертки (8).

В формулах (8) свертка по компонентам выполняется в соответствии с определением свертки в пространстве обобщенных функций [11, 12]. Для регулярных источников, описываемых локально интегрируемыми функциями, эту формулу можно представить в интегральном виде:

$$u_j(x, t) = \iint_{R^2} U_j^k(x - y, t - \tau) * F_k(y, \tau) dy d\tau \quad j, k = 1, 2. \quad (12)$$

#### 4 Решение задачи Коши

Чтобы получить интегральное представление обобщенного решения, возьмем свертки (8) с учетом (7), используя свойства функций и ее производной (переменная  $x$  под знаком свертки означает неполную свертку только по  $x$ ):

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, t) = u(x, t)H(t) &= \hat{U}_1^1(x, t) * F_1(x, t)H(t) + \hat{U}_1^1(x, t) *_{\underset{x}{\nu_0}} \nu_0(x) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_1^1(x, t) *_{\underset{x}{\nu_0}} \nu_0(x) + \hat{U}_1^2(x, t) *_{\underset{x}{F_2}} F_2(x, t)H(t) + \hat{U}_1^2(x, t) *_{\underset{x}{\kappa^{-1}\theta_0}} \kappa^{-1}\theta_0(x)\end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{\theta}(x, t) = \theta(x, t)H(t) = \hat{U}_2^2(x, t) * F_2(x, t)H(t) + \hat{U}_2^2(x, t) *_{\underset{x}{\kappa^{-1}\theta_0}} \kappa^{-1}\theta_0(x) \quad (14)$$

Отметим, что все начальные условия задачи Коши входят в правую часть соотношений (13), (14). Поскольку входящие в правую часть уравнений (13), (14) функции являются регулярными, эти представления решения можно записать в следующем интегральном виде.

Сформулируем следующую теорему.

**Теорема.** Если  $F_1(x, t), F_2(x, t)$  интегрируемые на  $R^2$  функции, а  $\nu_0$  непрерывны на  $R$ , то решение задачи Коши для уравнений несвязанной термоупругости имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, t) = & H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, \tau) F_1(y, t-\tau) dy + H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, \tau) v_0(y) dy + \\ & + H(t) \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x-y, \tau) u_0(y) dy + H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y, \tau) F_2(y, t-\tau) dy + \\ & + \kappa^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x-y, \tau) \theta_0(y) dy\end{aligned}\quad (15)$$

$$\hat{\theta}(x, t) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x-y, \tau) F_2(y, t-\tau) dy + \kappa^{-1} H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x-y, \tau) \theta_0(y) dy \quad (16)$$

где  $t > 0$ .

Используя представление тензора Грина (11) и  $\hat{G}_1(x, t)$ ,  $\hat{G}_2(x, t)$  (7), решение задачи Коши имеет вид:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \hat{U}_1^j * \hat{G}_j = \\ &= \delta_1^j \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} * G_j - \delta_1^j \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} * G_j - \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} * G_j - \delta_1^j \Sigma_3(t) \delta(x) * G_j + \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} * G_j = \\ &= \left\{ \left( \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\} * G_1 + \tilde{\gamma} \left( \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right) * G_2 = \\ &= \left\{ \left( \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\} * \hat{F}_1 + \tilde{\gamma} \left( \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right) * \hat{F}_2 + \\ &\quad \left\{ \left( \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\}_x * v_0(x) - \kappa^{-1} \tilde{\gamma} \left( \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right)_x * \theta_0(x) + \\ &\quad + \partial_t \left\{ \left( \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\}_x * u_0(x) \\ \theta(x, t) &= \hat{U}_2^j * \hat{G}_j = c^2 \Sigma_3(x, t) * G_2 + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} * G_2 - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} * G_2 = \\ &= \left( c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} \right) * F_2(x, t) H(t) - \left( c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} \right)_x * \kappa^{-1} \theta_0(x)\end{aligned}\quad (17)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}f1(x, t) &= \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} - \Sigma_3(t), \quad f2(x, t) = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x}, \\ f3(x, t) &= c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Тогда интегральное представление (15, 16) имеет следующий вид:

$$u(x, t) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \{f_1(x-y, t-\tau) F_1(y, \tau) + \tilde{\gamma} f_2(x-y, t-\tau) * F_2(y, \tau)\} dy +$$

$$+ H(t) \int_{-\infty}^{\infty} \{f_1(x-y, t) v_0(y) - \kappa^{-1} \tilde{\gamma} f_2(x-y, t) \theta_0(y) + \partial_t f_1(x-y, t) u_0(y)\} dy$$

$$\theta(x, t) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x-y, t-\tau) F_2(y, \tau) dy - \kappa^{-1} H(t) \int_0^t f_3(x-y, t) \theta_0(y) dy$$

Заметим, что формулы (15), (16) можно использовать и при действии сингулярных источников  $\hat{F}_1(x, t)$ ,  $\hat{F}_2(x, t)$ , только в этом случае свертки надо брать по правилам свертки в пространстве обобщенных функций [11, 12].

### 5 Численные расчеты тензора Грина

В системе MathCad-14 разработана программа для расчета тензора Грина  $U_i^j(x, t)$ . Здесь представлены расчеты компонент этой матрицы для следующих безразмерных условных термоупругих параметров:  $\rho = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\kappa = 2$ .

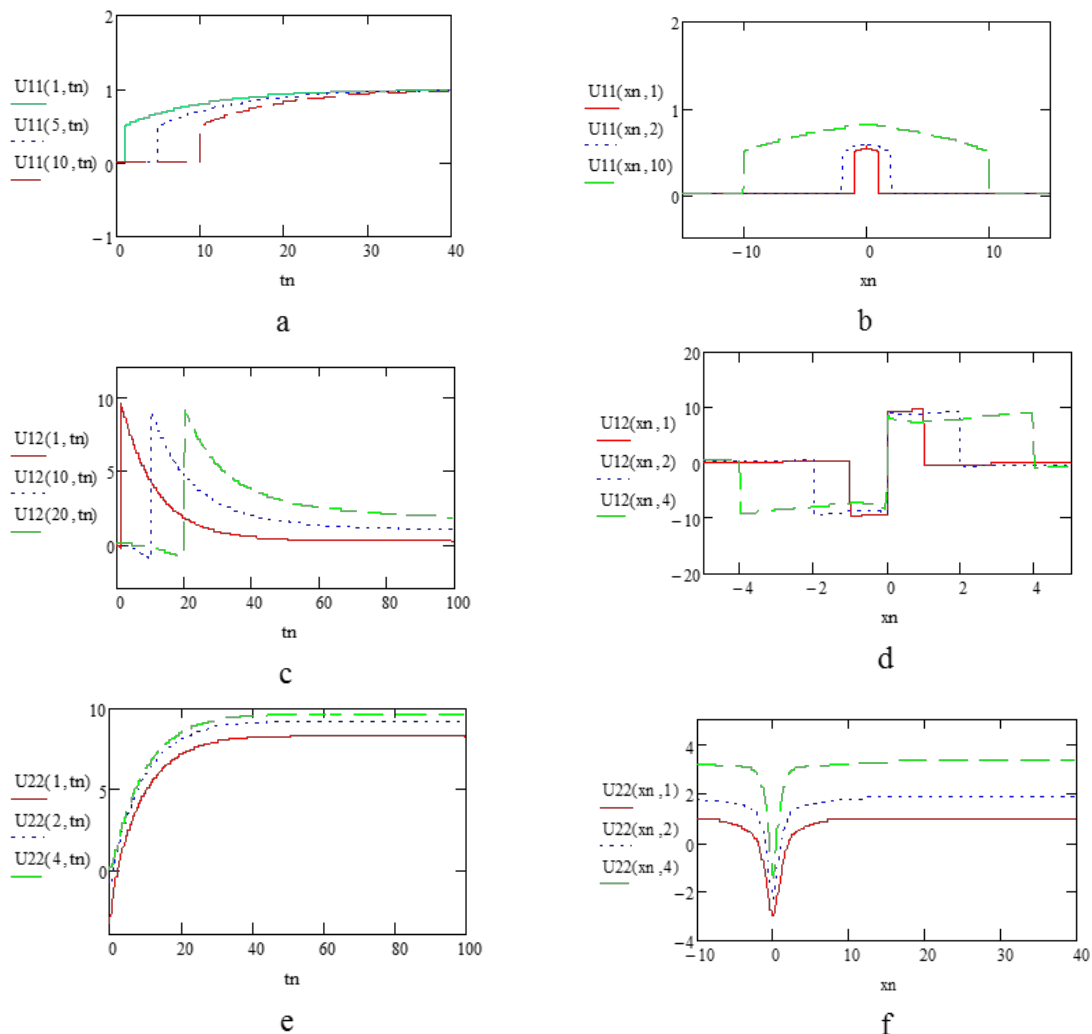


Рисунок 1 – Компоненты тензора Грина ( $U_{ij}(xn, tn) = U_i^j(x, t)$ ) в фиксированной точке и в фиксированное время

На рисунке 1 (а–f) представлены изменения во времени соответствующих компонент тензора Грина в фиксированной точке среды ( $x=x_n$ ) и в заданный момент времени ( $t=t_n$ ). Перемещения, отображенные на графиках, имеют скачки, связанные с моментом прихода упругой ударной волны в точку  $x_n$  в момент времени  $t_n=x_n/c$ .

#### 6 Решения задачи Коши при действии распределенных силовых и тепловых источников

Давайте рассмотрим решения задачи Коши при воздействии различных распределенных силовых и тепловых источников регулярного типа.

Задача Коши 1. Пусть на отрезке стержня приложена сила:

$$F_1(x, t) = A(x, t)H(L - |x|), F_2(x, t) = 0.$$

Начальные условия – нулевые. Тогда, используя формулы 15, 16, теоремы 1, получим перемещение:

$$u(x, t) = U_1^1(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^1(x - y, \tau) A(y, t - \tau) d\tau$$

Из (2) следует

$$\begin{aligned} \sigma_1(x, t) &= \rho c^2 u_{,x} = \rho c^2 U_{1,x}^1(x, t) * F_1(x, t) = \rho c^2 U_1^1(x, t) * \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x} = \\ &= \rho c^2 U_1^1(x, t) * (A(x, t)H(L - |x|))_{,x} = \\ &= \rho c^2 U_1^1(x, t) * A(x, t) \{ \delta(L + x) - \delta(L - x) \} + \rho c^2 U_1^1(x, t) * (A_{,x} H(L - |x|)) = \\ &= \rho c^2 H(t) \int_0^t \{ U_1^1(x + L, \tau) A(-L, t - \tau) - U_1^1(x - L, \tau) A(L, t - \tau) \} d\tau \\ &\quad + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L dy \int_0^t U_1^1(x - y, \tau) A(y, t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Задача Коши 2. Пусть на отрезке действует тепловой источник:

$$F_1(x, t) = 0, F_2(x, t) = A(x, t)H(L - |x|)$$

Начальные условия – нулевые. Тогда

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_1^2(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x - y, \tau) A(y, t - \tau) dy \\ \theta(x, t) &= U_2^2(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_2^2(x - y, \tau) A(y, t - \tau) dy \\ \sigma(x, t) &= \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta = \\ &= \rho c^2 H(t) \int_0^t \{ U_1^2(x + L, \tau) A(-L, t - \tau) - U_1^2(x - L, \tau) A(L, t - \tau) \} d\tau + \\ &\quad + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L dy \int_0^t \{ U_1^2(x - y, \tau) - \gamma U_2^2(x - y, \tau) \} A(y, t - \tau) d\tau \end{aligned}$$



Задача Коши 3. Пусть на отрезке стержня приложена сила. Начальные условия – нулевые.

$$F_1(x, t) = A(x)H(L - |x|)H(t), F_2(x, t) = 0$$

$$u(x, t) = U_1^1(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_{-L}^L A(x - y)dy \int_0^t U_1^1(y, \tau)d\tau$$

$$\sigma(x, t) = \rho c^2 H(t) \int_0^t \left\{ U_1^1(x + L, \tau)A(-L) - U_1^1(x - L, \tau)A(L) \right\} d\tau +$$

$$+ \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L A(x - y)dy \int_0^t U_1^1(y, \tau)d\tau$$

Задача Коши 4. Пусть на отрезке действует тепловой источник:

$$F_1(x, t) = 0, F_2(x, t) = A(x)H(t)H(L - |x|)$$

Начальные условия – нулевые. В этом случае

$$u(x, t) = U_1^2(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x - y, \tau)A(y)dy$$

$$\theta(x, t) = U_2^2(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_2^2(x - y, \tau)A(y)dy$$

$$\sigma(x, t) = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta =$$

$$= \rho c^2 H(t) \int_0^t \left\{ U_1^2(x + L, \tau)A(-L) - U_1^2(x - L, \tau)A(L) \right\} d\tau +$$

$$+ \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L A(y)dy \int_0^t \left\{ U_1^2(x - y, \tau) - \gamma U_2^2(x - y, \tau) \right\} d\tau$$

При совместном распределении силовых и тепловых источников подобного типа решение будет суммой соответствующих решений для каждого из них.

## Материалы и методы

Решение задачи Коши для определения термонапряженного состояния термоупругого стержня при действии распределенных силовых и тепловых источников. Для исследования использовался метод обобщенных функций.

## Результаты и обсуждение

Результатом проведенного исследования являются численные расчеты температуры и перемещений стержня при действии импульсных сосредоточенных силовых и тепловых источников.

### Заключение

Полученные формулы и разработанная программа позволяют исследовать термодинамические процессы в стержнях при действии различных тепловых и силовых источников, как распределенных, так и импульсных и сосредоточенных, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

Результаты исследования, а также разработанная компьютерная программа, могут быть использованы для оценки прочности и надежности при эксплуатации стержневых конструкций, используемых в машиностроении и строительстве наземных и подземных сооружений, таких как опоры зданий, колонны и другие элементы.

### Информация о финансировании

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант BR20280990), а также проектом № AP19674789.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Li Y. Investigation of heat transfer characteristics on rod fastening rotor. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 677. – No. 3. – P. 032032.
- 2 Shibib K., Minshid M., Alattar N. Thermal and stress analysis in Nd: YAG laser rod with different double end pumping methods. Thermal Science. – 2011. – No. 15. – P. 399–407.
- 3 Andreev V., Turusov R. Nonlinear modeling of the kinetics of thermal stresses in polymer rods. Advanced Materials and Structural Engineering. – 2016. – P. 719–722.
- 4 Sukarno D.H. Analysis of nuclear fuel rod temperature distribution using CFD calculation and analytical solution. Proceedings of the 6th international symposium on current progress in mathematics and sciences. – 2021.
- 5 Mishchenko A. Spatially Structure Spatial Problem of the Stressed-Deformed State of a Structural Inhomogeneous Rod. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering – 2020. – P. 953, 012004.
- 6 Hwang J.K. Thermal Behavior of a Rod during Hot Shape Rolling and Its Comparison with a Plate during Flat Rolling. Processes. – 2020. – Vol. 8. – No. 3. – 327 p.
- 7 Liu Q., He X. Thermal analysis of terfenol-d rods with different structures. Micromachines – 2023. – Vol. 14. – No. 1. – 216 p.
- 8 Arshidinova M., Tashev A., Kudaykulov A. Developing a method of accounting for the existence of local surface heat exchange in rods of variable cross-section. Applied mechanics. – 2023. – Vol. 3. – No. 7 (123).
- 9 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
- 10 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
- 11 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – 1981. – 512 с.
- 12 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979.
- 13 Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Айнакеева Н.Ж. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений нестационарной динамики термоупругих стержней // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – 2018. – № 2 (123). – С. 56–64.
- 14 Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Green tensor and regular solutions of equations of rods thermodynamics and their properties // Journal of theoretical and applied mechanics. – 2021. – Vol. 59. – No. 2. – P. 227–238.

### REFERENCES

- 1 Li Y. (2019) Investigation of heat transfer characteristics on rod fastening rotor. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 677, no. 3, p. 032032.
- 2 Shibib K., Minshid M., Alattar N. (2011) Thermal and stress analysis in Nd: YAG laser rod with different double end pumping methods. Thermal Science, no. 15, pp. 399–407.

- 3 Andreev V., Turusov R. (2016) Nonlinear modeling of the kinetics of thermal stresses in polymer rods. *Advanced Materials and Structural Engineering*, pp. 719–722.
- 4 Sukarno D.H. (2021) Analysis of nuclear fuel rod temperature distribution using CFD calculation and analytical solution. *Proceedings of the 6th international symposium on current progress in mathematics and sciences*.
- 5 Mishchenko A. (2020) Spatially Structure Spatial Problem of the Stressed-Deformed State of a Structural Inhomogeneous Rod. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, no. 953, p. 012004.
- 6 Hwang J.K. (2020) Thermal Behavior of a Rod during Hot Shape Rolling and Its Comparison with a Plate during Flat Rolling. *Processes*, vol. 8, no. 3, 327 p.
- 7 Liu Q., He X. (2023) Thermal analysis of terfenol-d rods with different structures. *Micromachines*, vol. 14, no. 1, 216 p.
- 8 Arshidinova M., Tashev A., Kudaykulov A. (2023) Developing a method of accounting for the existence of local surface heat exchange in rods of variable cross-section. *Applied mechanics*, vol. 3, no. 7(123).
- 9 Novackii V. (1975) *Teoriya uprugosti*. Moscow, 872 p. [in Russian].
- 10 Novackii V. (1970) *Dinamicheskie dinamiki termouprugosti*. Moscow, 256 p. [in Russian].
- 11 Vladimirov V.S. (1981) *Uravneniya matematicheskoi fiziki*, 512 p. [in Russian].
- 12 Vladimirov V.S. (1979) *Obobsheniye funkzii v matematicheskoi fizike*. [in Russian].
- 13 Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. (2018) Fundamentalnye i obobshennyye resheniya uravnenii nestazionarnoi dinamiki termouprugih sterzhnei. *Vestnik ENU named L.N.Gumileva*, vol. 123, no. 2, pp. 56–64.
- 14 Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. (2021) Green tensor and regular solutions of equations of rods thermodynamics and their properties. *Journal of theoretical and applied mechanics*, vol. 59, no. 2, pp. 227–238.

<sup>1,2,3</sup>**Айнакеева Н.Ж.,**

докторант, ORCID ID: 0000-0003-4643-6072, e-mail: nursaule\_math@mail.ru

<sup>1</sup>Академик У.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты,  
050010, Алматы, Қазақстан

<sup>2</sup>Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, 050040, Алматы, Қазақстан

<sup>3</sup>Нархоз университеті, 050035, Алматы қ, Қазақстан

## СТАЦИОНАРЛЫҚ ЕМЕС ЖЫЛУ МЕН КҮШ ӘСЕРІНДЕГІ ТЕРМОҚАТТЫ ӨЗЕК ДИНАМИКАСЫ

### Аңдатпа

Өзек элементтері техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады. Температура өрісінің уақытша өзгеруі штангалық құрылымдарда уақытша өзгертін кернеу өрісін тудырады, бұл олардың беріктігі мен сенімділігіне әсер етеді. Серпімділік сияқты механикалық қасиеттерін ескере отырып, өзек конструкцияларының термиялық кернеулі күйін анықтау өзекті ғылыми-техникалық міндеттердің бірі. Математикалық модельдеу әдістерін қолдану құрылымда және оның элементтерінде болатын термодинамикалық процестерді зерттеуге және жобалау кезеңінде олардың динамикалық және беріктік сипаттамаларын анықтауға мүмкіндік береді. Бұл жұмыс ерікті бастапқы жағдайларда, сондай-ақ күш пен жылу әсерінен термоэластикалық штанганың динамикасы үшін Коши міндетін қарастырады. Грин тензорының көмегімен жылу-серпімділік теңдеулері, егер оның бастапқы күйі және белсенді күш пен жылу көздері белгілі болса, штанганың кез келген қимасындағы және кез келген уақытта деформацияларды, кернеулер мен температураны анықтауға мүмкіндік беретін есептің аналитикалық шешімі алынды. Импульстік шоғырланған күш пен жылу көздерінің әсерінен температураның, қозғалыстың сандық есептеулері ұсынылған. Тұрақты түрдегі қуат және жылу көздерінің өзегі бойымен бөлінген кезде Коши мәселелерін шешу есептеулері жүргізілді. Өзірленген бағдарлама оқшауланған жалпыланған функциялармен сипатталатын үлестірілген және шоғырланған және импульстік жылу және қуат көздерінің әсерінен әртүрлі физика-механикалық параметрлері бар өзектердегі термодинамикалық процестерді зерттеуге мүмкіндік береді.

**Тірек сөздер:** термоэластикалық өзек, температура, орын ауыстыру, кернеу, жалпыланған функция әдісі, Грин тензоры.

<sup>1,2,3</sup>**Ainakeyeva N.Zh.,**

Doctoral student, ORCID ID: 0000-0003-4643-6072, e-mail: nursaule\_math@mail.ru

<sup>1</sup>Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, 050010, Almaty, Kazakhstan<sup>2</sup>Kazakh National University named al-Farabi, 050040, Almaty, Kazakhstan<sup>3</sup>Narxoz University, 050035, Almaty, Kazakhstan**DYNAMICS OF A THERMOELASTIC ROD UNDER UNSTEADY  
THERMAL AND FORCE INFLUENCES****Abstract**

Rod elements are extensively utilized in various technological fields. An unsteady temperature field induces a time-varying stress field within the rod structure, impacting its strength and reliability during operation. Determining the thermally stressed state of rod structures, considering their mechanical properties (especially elasticity), is a significant scientific and technical challenge. The application of mathematical modeling methods enables the study of thermodynamic processes occurring within a structure and its elements, allowing for the determination of their dynamic and strength characteristics during the design phase. This paper addresses the Cauchy problem for the dynamics of a thermoelastic rod under arbitrary initial conditions and subjected to force and thermal influences. By employing the Green's tensor for thermoelasticity equations, an analytical solution is derived, which determines deformations, stresses, and temperatures at any point along the rod at any given time, provided the initial state and the acting force and heat sources are known. Numerical calculations of temperature and displacement are presented for cases involving pulsed concentrated force and heat sources. Additionally, solutions to Cauchy problems under the influence of regular force and heat sources distributed along the rod are computed. The developed program allows for the investigation of thermodynamic processes in rods with various physical and mechanical properties, under the influence of both distributed and concentrated pulsed thermal and force sources, described by singular generalized functions.

**Key words:** Cauchy problem, rod, uncouple thermoelasticity, method of generalized functions, temperature, displacement and stress.