УДК 517.54
МРНТИ 27.23.25

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138

[1]Майер Ф.Ф.,
канд. физ.-мат. наук, профессор, ORCID ID 0000-0002-2278-2723, e-mail: maiyer@mail.ru
[1]Тастанов М.Г.,
канд. физ.-мат. наук, профессор, ORCID ID 0000-0003-1926-8958, e-mail: tastao@mail.ru
[1]Утемисова А.А.,
канд. пед. наук, ORCID ID 0000-0001-5143-0260, e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]Ысмағұл Р.С.,
канд. физ.-мат. наук, профессор, ORCID ID 0009-0007-6594-7958, e-mail: ismagulr@mail.ru

[1]НАО «Костанайский региональный университет имени Ахмета Байтұрсынұлы»,
г. Костанай, 110000, Казахстан

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ И РАДИУСЫ ВЫПУКЛОСТИ И ЗВЕЗДООБРАЗНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ И ПОЧТИ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

Известно, что многие задачи для подклассов однолистных функций могут быть преобразованы в задачи минимизации или максимизации некоторых функционалов, связанных с исследуемыми подклассами однолистных функций. Часто в качестве такого функционала выступает логарифмическая производная регулярных функций. В настоящей статье вводится двухпараметрический подкласс $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ регулярных в единичном круге функций с положительной вещественной частью, разложение в ряд которых начинается с n-ной степени, обобщающий известный класс Р. Гоела и Д. Шаффера регулярных функций, значения которых содержатся в круге, симметричном относительно действительной оси, содержащем на границе точку 0. В указанном классе функций получены точные оценки различных функционалов, включая логарифмическую производную. В качестве приложений этих оценок найдены точные радиусы выпуклости (или звездообразности) различных классов звездообразных и почти звездообразных функций, заданных с использованием класса $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$. Все полученные результаты являются точными и обобщают многие из ранее известных результатов. Применение полученных в статье оценок является перспективным, так как вносит вклад в теорию экстремальных задач, связанных с различными подклассами однолистных функций.

Ключевые слова: оценки регулярных функций, однолистные функции, звездообразные функции, радиус выпуклости, радиус звездообразности.

Введение

Решение многих экстремальных задач для подклассов однолистных функций $f(z)$ сводится к задаче максимизации или минимизации при $|z| = r, 0 < r < 1$ соответственно функционалов

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|, Re\left\{\mu\,\varphi(z) + \eta\, z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right\}, \mu,\eta \geq 0, \qquad (1)$$

на классе $\mathcal{M}(\varphi_0)$, определяющем класс функций $f(z)$.

Для классов функций $\varphi(z)$, заданных условиями $Re\,\varphi(z) \geq 0$ или $|\varphi(z) - 1| \leq 1$, точная оценка сверху первого из функционалов (1) получена в [1–3]. Обобщения этих результатов на случай, когда $\varphi(z)$ удовлетворяет условию $|\varphi(z) - a| \leq a$, найдены в [4–5].

Данные результаты использовались многими авторами при исследовании различных подклассов однолистных функций, так или иначе сводящихся к условию $|\varphi(z) - a| \leq a$.

В настоящей статье вводится класс $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ регулярных в E функций $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \cdots, n \geq 1, z \in E$, удовлетворяющих условию $\left|\left(\varphi(z)\right)^{1/\gamma} - a\right| \leq a, a > 1/2, 0 < \gamma \leq 1$, не только обобщающий известный класс Р. Гоела [4] и Д. Шаффера [5], но и включающий класс функций с ограниченным аргументом. Для него получены точные оценки функционалов (1), и в качестве их приложений найдены точные радиусы выпуклости (или звездообразности) различных классов звездообразных и почти звездообразных функций, заданных с использованием класса $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$. Все полученные результаты являются точными, дают как новые, так и обобщают ранее известные результаты.

Материалы и методы

Через S, S^{o}, S^{*} и K будем обозначать соответственно классы однолистных, выпуклых, звездообразных и почти выпуклых функций $f(z)$.

Основным методом исследования статьи является метод подчиненности регулярных функций. Будем говорить, что регулярная в E функция $\varphi(z)$ подчинена однолистной функции $\varphi_0(z)$ в круге E, и писать $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$.

Основные положения

Будем считать, что $\mathcal{R}_n$ – класс регулярных в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $\varphi(z)$, имеющих разложение вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \cdots, n \geq 1, z \in E$, и $\mathcal{N}_n$ – класс нормированных регулярных в E функций $f(z)$ вида $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, n \geq 1, z \in E$.

Если $\mathcal{M}_n$ есть $\mathcal{R}_n$ или $\mathcal{N}_n$ или некоторый подкласс классов $\mathcal{R}_n$ или $\mathcal{N}_n$, то при $n = 1$ нижний индекс у класса $\mathcal{M}_n$ для упрощения обозначений будем опускать, то есть будем считать, что $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1$. И обратно, если $\mathcal{M}$ есть некоторый подкласс класса $\mathcal{R}$ или $\mathcal{N}$, то добавление нижнего индекса n у обозначения этого подкласса будет означать, что функции этого подкласса $\mathcal{M}_n$ имеют разложение соответственно вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \cdots, n \geq 1$, или $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots, n \geq 1$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{R}_n$, у которых $Re\,\varphi(z) \geq 0, z \in E$.

Обзор литературы

Пусть $\mathcal{M}(\varphi_0)$ обозначает класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{R}$, который с помощью условия подчиненности функций

$$\varphi(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \varphi_0(z) \qquad (2)$$

задает подкласс $S^*(\varphi_0)$ звездообразных функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$.

Тогда, например,

1) $\mathcal{M}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \equiv \mathcal{P}$ и $S^*\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \equiv S^*$ – есть класс всех звездообразных функций;

2) если $\varphi_0(z) = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$, то получаем класс $\mathcal{M}(\varphi_0) = \{\varphi(z) \in \mathcal{R}: Re\,\varphi(z) \geq \alpha, 0 \leq \alpha < 1\}$, которому соответствует класс S^*_α звездообразных функций $f(z)$ порядка α [6];

3) если $\varphi_0(z) = \sqrt{1+z}$, то получаем класс $\mathcal{M}(\varphi_0) = \{\varphi(z) \in \mathcal{R}: |\varphi^2(z) - 1| \leq 1\}$ и соответствующий ему класс S^*_L лемнискатных функций $f(z)$ [7];

4) функция $\varphi_0(z) = \frac{1+z}{1-(1-1/a)z}$ задает условие $|\varphi(z) - a| \leq a, a > \frac{1}{2}$, которое определяет класс $S^*(a)$ звездообразных функций $f(z)$, введенный Яновским [8].

Начиная с классического результата о радиусе выпуклости $r_0 = 2 - \sqrt{3}$ класса S, вычисление различных геометрических радиусов стало отдельным направлением в геометрической теории функций (см. напр. [7, 9–12]).

Работы М. Рида [13] и Т. МакГрегора [1–3, 14] стали началом изучения классов почти звездообразных функций (см. напр. [10, 11, 15]).

Таким образом, исходя из вышеописанного обзора исследований, в настоящее время сохраняет актуальность вопрос о введении новых классов регулярных функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{R}_n$ и получении для них оценок функционалов (1), позволяющих проводить исследование новых классов функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$.

Результаты и обсуждение

Оценки в некоторых классах регулярных функций

Лемма [16]. Пусть функция $\Phi(z) + 1 \in \mathcal{R}_n$ и удовлетворяет условию

$$\left|\exp\left\{\frac{1}{\gamma}\Phi(z)\right\} - a\right| \leq a, a > \frac{1}{2},\ 0 < \gamma \leq 1. \qquad (3)$$

Тогда при $|z| = r < 1$ справедлива точная оценка

$$|\Phi'(z)| \leq \frac{\gamma(2a-1)nr^{n-1}}{(1-r^n)[a+(a-1)r^n]}. \qquad (4)$$

Определение 1. Обозначим через $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ класс функций $\varphi(z) \in \mathcal{R}_n$, для которых

$$\left|(\varphi(z))^{\frac{1}{\gamma}} - a\right| \leq a, a > 1/2, 0 < \gamma \leq 1, z \in E. \qquad (5)$$

При $a \to \infty$ класс $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ сводится к классу

$\mathcal{P}_n(\gamma) = \left\{\varphi(z) \in \mathcal{P}_n: |\arg\varphi(z)| \leq \frac{\gamma\pi}{2},\ z \in E\right\}$. При этом

$\mathcal{P}_n(a,\gamma) \subset \mathcal{P}_n(\gamma) \subset \mathcal{P}(1) = \mathcal{P}$.

Теорема 1. Пусть $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(a,\gamma)$. Тогда при $|z| = r, 0 \le r < 1$, имеют место оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma} \le Re\varphi(z) \le |\varphi(z)| \le \left(\frac{1+r^n}{1-(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma}, \qquad (6)$$

$$|\arg\varphi(z)| \le \gamma \arcsin\frac{(2-1/a)r^n}{1+(1-1/a)r^{2n}}, \qquad (7)$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \le \frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)} \qquad (8)$$

и для любых $\mu, \eta \ge 0$

$$\mu Re\,\varphi(z) + \eta Re\,z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \ge$$

$$\ge \mu\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma} - \eta\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}, \qquad (9)$$

Оценки точные и достигаются для функции $\varphi(z) = \varphi_0(z^n)$, где

$$\varphi_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-(1-1/a)z}\right)^{\gamma}, \qquad (10)$$

Доказательство. Условие (5) равносильно тому, что выполняется подчиненность функций $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, где $\varphi_0(z)$ – отображение круга E на область $\{w: |w^{1/\gamma} - a| < a,\ Rew > 0\}$, ограниченную кривой, сходной с правой половиной лемнискаты Бернулли с узловой точкой $w = 0$ и углом между касательными в узловой точке, равным $\gamma\pi$.

В силу подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ с учетом выпуклости функции $\varphi_0(z)$ и свойства ее симметрии $\varphi_0(\overline{z}) = \overline{\varphi_0(z)}$ относительно действительной оси при любом $r, 0 < r < 1$ имеет место включение $\varphi(|z| \le r) \subset \varphi_0(|z| \le r^n)$. Отсюда в силу геометрических свойств множества $\varphi_0(|z| \le r^n)$ вытекает неравенство $\varphi_0(-r^n) \le Re\varphi(z) \le |\varphi(z)| \le \varphi_0(r^n)$, что равносильно оценке (6).

Поскольку

$$\varphi^{1/\gamma}(z) \prec w(z) = \frac{1+z}{1-(1-1/a)z},$$

где $w(z)$ есть отображение круга E на круг $|w - a| < a$, то $\varphi^{1/\gamma}(|z| \le r) \subset w(|z| \le r^n)$.

Поэтому при $|z| = r, 0 \le r < 1$, выполняется неравенство

$$\left|\varphi^{1/\gamma}(z) - C(r)\right| \le R(r),$$

$$C(r)=\frac{1+(1-1/a)r^{2n}}{1-(1-1/a)r^{2n}},R(r)=\frac{(2-1/a)r^{n}}{1-(1-1/a)r^{2n}}.$$

Отсюда в силу геометрических соображений нетрудно найти, что

$$\left|\frac{1}{\gamma}\arg\varphi(z)\right|=\left|\arg\varphi^{\frac{1}{\gamma}}(z)\right|\leq\arcsin\frac{R(r)}{C(r)},$$

откуда вытекает оценка (7).

Поскольку $\Phi(z)=\ln\varphi(z)\prec\Phi_0(z)=\ln\varphi_0(z)$, то условие (5) можно переписать в виде (3). Поэтому оценка (8) сразу вытекает из оценки (4).

Оценка (9) вытекает из оценки (8) и левой оценки (6).

Точность оценок (6)–(8) проверяется непосредственно. Отметим лишь важное для дальнейшего, что левая оценка (6) и оценки (8)–(9) достигаются для функции $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$ в точке $z=\sqrt[n]{-1}\,r$, где $\varphi_0(z)$ задана формулой (10).

Примечание. При $\gamma=n=1$ оценки (6), (8) получены в [4], а при $\gamma=1,n\geq1$ – совпадают с оценками из [5]. При $\gamma=n=1$ случаи $a\to\infty$ $(Re\,\varphi(z)\geq0)$ и $a=1$ $(|\varphi(z)-1|\leq1)$ условия (5), а также случай $a\to\infty$ при $n\geq1$ приводят соответственно к оценкам [1–3].

При $n=1,a\to\infty,0<\gamma\leq1$ оценка (8) получена в [17], а при $\gamma=1/2\,,a=1$, когда условие (5) равносильно подчиненности $\varphi(z)\prec\varphi_0(z)=\sqrt{1+z}$, частные случаи оценок (6), (8) совсем недавно получены в [18].

Если $\psi(z)\in\mathcal{P}_n(a,\gamma)$, то функция $\varphi(z)=1/\psi(-z)$ удовлетворяет условию

$$\left|\left(\varphi(z)\right)^{-1/\gamma}-a\right|\leq a,a>1/2\,,0<\gamma\leq1,z\in E.$$

Класс таких функций $\varphi(z)$ обозначим через $\widehat{\mathcal{P}_n}(a,\gamma)$. Поскольку $z\,\varphi'(z)/\varphi(z)=-z\,\psi'(-z)/\psi(-z)$, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Если функция $\varphi(z)\in\widehat{\mathcal{P}_n}(a,\gamma)$, то при $|z|=r<1$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-(1-1/a)r^n}{1+r^n}\right)^{\gamma}\leq Re\varphi(z)\leq|\varphi(z)|\leq\left(\frac{1+(1-1/a)r^n}{1-r^n}\right)^{\gamma},$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\leq\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}.$$

Экстремальная функция имеет вид $\varphi(z)=[\varphi_0(-z^n)]^{-1}$, где $\varphi_0(z)$ – функция из (10).

Заметим, что при $\gamma=1$ функции $\varphi(z)$ из $\widehat{\mathcal{P}_n}(a,1)$ удовлетворяют условию $Re\,\varphi(z)\geq\beta$, где $\beta=1/(2a)\,,0\leq\beta<1$, и следствие 1 приводит к результатам из [5, 19], а при $\beta=0$ и при $n=1,0\leq\beta<1$ – к результатам из [3, 20].

Радиусы выпуклости некоторых классов звездообразных функций

Определение 2. Будем считать, что функция $f(z)$ из $\mathcal{N}_n$ принадлежит классу $S_L^*(a,\gamma,n)$ тогда и только тогда, когда $z\frac{f'(z)}{f(z)}\in\mathcal{P}_n(a,\gamma)$, то есть выполняется условие

$$\left|\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right|\leq a, a>1/2\,, 0<\gamma\leq 1, z\in E.$$

Введение данного класса было предложено Е. Папроцки и Ж. Соколом [21] как расширение класса функций [7], заданного условием $|(z\,f'(z)/f(z))^2-1|\leq 1$.

Теорема 2. Точный радиус выпуклости r_0 класса $S_L^*(a,\gamma,n)$ определяется как единственный на $(0;1)$ корень уравнения

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma}-\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}=0 \qquad (11)$$

Доказательство. Обозначив $z\frac{f'(z)}{f(z)}=\varphi(z)$, получаем

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=z\frac{f'(z)}{f(z)}+z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\varphi(z)+z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Поэтому в силу оценки (9) при $\mu=\eta=1$ в круге $|z|\leq r$

$$Re\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\geq\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma}-\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/a)r^n)}.$$

Если r_0 – наименьший положительный корень уравнения (11), то в круге $|z|\leq r_0$ выполняется условие выпуклости $1+Re z\frac{f''(z)}{f'(z)}\geq 0$ и функция $\mathrm{f(z)}$ является выпуклой.

Покажем, что на $(0;1)$ уравнение (11) имеет единственный корень r_0. Для этого преобразуем уравнение (11) к виду $\psi_0(r)-\psi_1(r)=0$, где

$$\psi_0(r)=\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/a)r^n}\right)^{\gamma-1},\ \psi_1(r)=\frac{\gamma(2-1/a)nr^n}{(1-r^n)^2}.$$

Поскольку для $z=r$ функция $\varphi_0(z)|_{z=r}=\left(\frac{1+r}{1-(1-1/a)r}\right)^{\gamma}$ из (10) на интервале $(0;1)$ положительна и монотонно возрастает, то $\psi_0(r)$ на $(0;1)$ монотонно убывает от $\psi_0(0)=1$ до $\psi_0(1)=0$. С другой стороны, нетрудно установить, что в силу условия $a>1/2$ функция $\psi_1(r)$ монотонно возрастает на $(0;1)$ от $\psi_1(0)=0$ до $\psi_1(1)=+\infty$. Поэтому уравнение $\psi_0(r)-\psi_1(r)=0$, а значит и (11), на $(0;1)$ имеет единственный корень r_0.

Для доказательства точности радиуса выпуклости определим экстремальную функцию $f_0(z)$ из уравнения $z\frac{f'(z)}{f(z)}=\varphi_0(z^n)$, где функция $\varphi_0(z)$ определена в (10). Тогда в точке $z=\sqrt[n]{-1}\,r$, где $r=r_0$, получаем

$$1+Re\,z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}\bigg|_{z=\sqrt[n]{-1}r}=\left(\frac{1-r_0^n}{1+(1-1/a)r_0^n}\right)^{\gamma}-\frac{\gamma(2-1/a)nr_0^n}{(1-r_0^n)(1+(1-1/a)r_0^n)}=0.$$

Следовательно, радиус выпуклости увеличить нельзя. Теорема 2 доказана.

Заметим, что $S_L^*(1,\gamma,1) \equiv S_L^*(\varphi_0)$, $\varphi_0(z) = (1+z)^\gamma, 0 < \gamma \le 1$, – есть класс лемнискатных функций $f(z)$ из [7], для которого уравнение (11) приобретает вид $(1-r)^{1+\gamma} = \gamma r$. То есть получаем теорему 2.15 из [9], а при $\gamma = 1/2$ – теорему 4 из [7].

При $\gamma = 1$ уравнение (11) преобразуется к виду $r^{2n} - (2+nc)r^n + 1 = 0$, где $c = 2 - 1/a$, откуда вытекает

Следствие 2. Если $f(z) \in S_L^*(a,1,n)$, то есть удовлетворяет условию

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - a \right| \le a, a > 1/2\,, z \in E,$$

то точный радиус выпуклости

$$r_0 = \left(\left(2 + nc - \sqrt{nc(4+nc)}\right)/2\right)^{1/n}, c = 2 - 1/a.$$

При $n = 1,\ c = 1 - A$ следствие 2 дает результат статьи [12]:

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - a \right| \le a, a > 1/2 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{1}{2}\left(3 - A - \sqrt{5 - 6A + A^2}\right), A = \frac{1}{a} - 1.$$

Радиусы звездообразности некоторых классов почти звездообразных функций

В 1955 году М. Рид [13] по аналогии с классом почти выпуклых функций ввел класс CS^* почти звездообразных функций, состоящий из функций $f(z) \in \mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$$Re\frac{f(z)}{g(z)} \ge 0, g(z) \in S^*, z \in E, \tag{12}$$

В дальнейшем в разных статьях вместо (12) рассматривались некоторые другие условия, связывающие $f(z)$ и $g(z)$, либо в качестве $g(z)$ рассматривались функции из некоторых подклассов класса S^*, либо конкретные звездообразные функции.

Определение 3. Будем считать, что функция $f(z)$ из $\mathcal{N}$ принадлежит классу $CS^*(a,\gamma,n,m)$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \left((1-z^n)^m\frac{f(z)}{z}\right)^{1/\gamma} - a \right| \le a, a > \frac{1}{2}, 0 < \gamma \le 1, m \ge 0, n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Если $nm \le 2$, то функция $g(z) = z/(1-z^n)^m$ является звездообразной в круге E.

Действительно, для функции $g(z)$ выполняется неравенство

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + nm\,Re\frac{z^n}{1-z^n} \ge 1 - \frac{nm}{2} \ge 0, z \in E,$$

при $nm \le 2$. Поэтому функция $g(z)$ является звездообразной в E, то есть функции $f(z)$ из $CS^*(a,\gamma,n,m)$ является почти звездообразными.

Частные случаи класса $CS^*(a,\gamma,n,m)$ исследовались в статьях [10, 11, 15], где найдены их радиусы звездообразности относительно различных подклассов класса S^* (например, относительно S^*_β, S^*_τ и других). В качестве примера найдем радиусы звездообразности порядка α класса $CS^*(a,\gamma,n,m)$.

Теорема 3. Точный радиус $r^*(\alpha)$ звездообразности порядка α класса функций $f(z) \in CS^*(a,\gamma,n,m)$ определяется как единственный на $(0;1)$ корень уравнения

$$1-\frac{nmr^n}{1+r^n}-\frac{\gamma(2-1/a)r}{(1-r)(1+(1-1/a)r)}-\alpha=0. \qquad (14)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$. Тогда

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=z\frac{g'(z)}{g(z)}+z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=1+\frac{nmz^n}{1-z^n}+z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \qquad (15)$$

В силу этого на основании теоремы 1 при $\mu=0, \eta=1, n=1$ в круге $|z|\le r$ получаем

$$Re\, z\frac{f'(z)}{f(z)}\ge 1-\frac{nmr^n}{1+r^n}-\frac{\gamma(2-1/a)r}{(1-r)(1+(1-1/a)r)}=\alpha.$$

Если $|z|\le r$, где $r=r^*(\alpha)$ – корень уравнения (14), то $Re\, z\frac{f'(z)}{f(z)}\ge\alpha$ и $f(z)$ является звездообразной порядка α в круге $|z|\le r^*(\alpha)$.

Как и при доказательстве теоремы 2 нетрудно доказать, что уравнение (14) на $(0;1)$ имеет единственный корень $r^*(\alpha)$. Покажем, что радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ увеличить нельзя.

Если n является нечетным, то для функции

$$f_0(z)=\frac{z}{(1-z^n)^m}\left(\frac{1+z}{1-(1-1/a)z}\right)^\gamma \in CS^*(a,\gamma,n,m)$$

в точке $z=-r$, где $r=r^*(\alpha)$, получаем:

$$Re\, z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}\bigg|_{z=-r}=1+Re\left(\frac{nmz^n}{1-z^n}+\frac{\gamma(2-1/a)z}{(1+z)(1-(1-1/a)z)}\right)\bigg|_{z=-r}=$$
$$1-\frac{nmr^n}{1+r^n}-\frac{\gamma(2-1/a)r}{(1-r)(1+(1-1/a)r)}=\alpha.$$

Если n – четное, то рассмотрим два случая.

Пусть $n=4k, k\in\mathbb{N}$. Тогда $i^n=1$. Обозначим $\varepsilon=i^{\frac{m+2}{m}}$. Тогда для $z=-\varepsilon r$ имеем $z^n=-r^n, \varepsilon^{-1}z=-r$. Если же $n=2(2k-1), k\in\mathbb{N}$, то $i^n=-1$ и, если обозначить $\varepsilon=-i$, то для $z=-\varepsilon r=ir$ опять получаем $z^n=-r^n, \varepsilon^{-1}z=-r$,

$$f_1(z)=\frac{z}{(1-z^n)^m}\left(\frac{1+\varepsilon^{-1}z}{1-(1-1/a)\varepsilon^{-1}z}\right)^\gamma \in CS^*(a,\gamma,n,m)$$

в точке $z=-\varepsilon r$ находим

$$Re\, z\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\Big|_{z=-\varepsilon r} = 1 + Re\left(\frac{nmz^n}{1-z^n} + \frac{\gamma(2-1/a)\varepsilon^{-1}z}{(1+\varepsilon^{-1}z)(1-(1-1/a)\varepsilon^{-1}z)}\right)\Big|_{z=-\varepsilon r} =$$
$$= 1 - \frac{nmr^n}{1+r^n} - \frac{\gamma(2-1/a)r}{(1-r)(1+(1-1/a)r)} = \alpha.$$

Во всех случаях в условии звездообразности порядка α достигается знак равенства. Поэтому радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ является точным. Теорема 3 доказана.

Класс $CS^*(a,\gamma,n,m)$ является обобщением классов $\mathcal{K}_1, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ из [10–11], заданных соответственно условиями

$$Re\{(1-z^2)f(z)/z\} \geq 0, Re\{(1-z)^2 f(z)/z\} \geq 0, Re\{(1-z)f(z)/z\} \geq 0.$$

При $\gamma = 1, a \to \infty$ и соответствующем выборе n, m получаем радиусы звездообразности порядка α классов $\mathcal{K}_1, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$, полученные в [10–11].

При $m = 0, \alpha = 0$ из теоремы 3 получаем точный радиус звездообразности

$$r^* = \begin{cases} \dfrac{1+\gamma(2a-1) - \sqrt{(1+\gamma(2a-1))^2 + 4a(a-1)}}{2(1-a)}, & a \neq 1, \\ 1+\gamma, & a = 1, \end{cases}$$

класса функций $f(z) \in \mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$\left|\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1/\gamma} - a\right| \leq a, a > \frac{1}{2}, 0 < \gamma \leq 1$. Для случая $\gamma = 1$ этот результат получен в [15], а при $\gamma = a = 1$ – в [14].

Заключение

В настоящей статье вводится класс $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ регулярных в круге E функций $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots, n \geq 1$, удовлетворяющих условию $\left|(\varphi(z))^{1/\gamma} - a\right| \leq a, a > 1/2, 0 < \gamma \leq 1$, обобщающий известный класс Гоела и Шаффера. В классе $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ установлены точные оценки при $|z| = r, 0 < r < 1$, функционалов (1).

В качестве примеров применения данных оценок найдены точные радиусы выпуклости (или звездообразности) некоторых классов звездообразных или почти звездообразных функций. Все полученные результаты являются точными и обобщают ранее известные результаты.

Известно, что решение многих задач на подклассах однолистных функций может быть сведено к задачам минимизации или максимизации некоторых функционалов, связанных с исследуемыми классами функций. В этом плане применение полученных в статье оценок указанных выше функционалов является перспективным, так как позволяет в дальнейшем решить целый ряд экстремальных задач, связанных с различными подклассами однолистных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1 MacGregor T.H. A class of univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – № 15. – P. 311–317.

2 MacGregor T.H. Functions whose derivative has a positive real part // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – № 104.– P. 532–537. doi: https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7

3 MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. –1963. – № 14. – P. 514–520.

4 Goel R.M. A class of close-to-convex functions // Czechoslovak Math. J. –1968. – Vol. 18. – № 93. – P. 104–116. doi: https://doi.org/10.21136/CMJ.1968.100815

5 Shaffer D.B. Distortion theorems for a special class of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 39. – № 2. – P. 281–287. doi: https://doi.org/10.2307/2039632

6 Robertson M.S. Certain classes of starlike functions // Michigan Math. J. – 1985. – Vol. 32. – №2. – P. 135–140.

7 Sokół J., Stankiewicz J. Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions // Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat. – 1996. – № 19. – P. 101–105.

8 Janowski W. Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families // Ann. Polon Math. – 1970. – Vol. 23. – P. 159–177.15.

9 Abolfathi M.A. New subclasses of Ozaka's convex functions // Int. J. Nonlinear Anal. Appl. – 2022. – P. 1–11. http://dx.doi.org/10.22075/ijnaa.2022.28231.4081

10 Khatter K., Lee S. K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744. – 2020. doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744

11 Sebastianc A., Ravichandran V. Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca 71. – 2021. –№ 1. – P. 83–104. doi: 10.1515/ms-2017-0454

12 Singh V., Goel R.M. On radii of convexity and starlikeness of some classes of functions // J. Math. Soc. Japan. – 1971. – № 23. – P. 323–339. doi: https://doi.org/10.2969/jmsj/02320323

13 Reade M.O. On close-to-close univalent functions // Michigan Math. J. – 1955. – № 3. – P. 59–62.

14 MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, II // Proc. Am. Math. Soc. – 1963. – № 14. – P. 521–524. doi: http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5

15 Chichra P. On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions // J. of the Australian Math. Soc. – 1972. - Vol. 13. –№ 2. – P. 208–218. doi: https://doi.org/10.1017/S1446788700011290

16 Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т. Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций // Вестник ТГУ, Серия «Математика и механика», Томск. – 2023. – № 84. – С. 147–156. doi: 10.17223/19988621/85/1

17 Nunokawa M., Sokół J. On the order of strong starlikeness and the radii of starlikeness for of some close-to-convex functions // Analysis and Mathematical Physics. – 2019. – № 9. – P. 2367–2378. doi: https://doi.org/10.1007/s13324-019-00340-–8

18 Ali R.M., Ravichandran V., Sharma K. Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios // Hindawi J. of Math., 2021, Article ID 8373209. – P. 1–8. https://doi.org/10.1155/2021/8373209

19 Shah G.M. On the univalence of some analytic functions //Pacific J. Math. –1972. – Vol. 43. – № 1. – P. 239–250. doi: https://doi.org/10.2140/pjm.1972.43.239

20 Shaffer D.B. On bounds for the derivative of analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – № 37. – P. 517–520. doi: http://dx.doi.org/10.11568/kjm.2021.29.4.785

21 Paprocki E., Sokol J. The extremal problems in some subclass of strongly starlike functions // Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat. – 1996. –№ 20. – P. 89–94.

REFERENCES

1 MacGregor, T.H. A class of univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc., 15, 311-317 (1964).

2 MacGregor, T.H. Functions whose derivative has a positive real part. Trans. Amer. Math. Soc., 104, 532–537 (1962). doi: https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1962-0140674-7

3 MacGregor, T.H. The radius of univalence of certain analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 14, 514–520 (1963).

4 Goel, R.M. A class of close-to-convex functions. Czechoslovak Math. J., 18(93), 104–116 (1968). doi: https://doi.org/10.21136/CMJ.1968.100815

5 Shaffer, D.B. Distortion theorems for a special class of analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 39(2), 281–287 (1973). doi: https://doi.org/10.2307/2039632

6 Robertson, M.S. Certain classes of starlike functions. Michigan Math. J., 32(2), 135–140 (1985).

7 Sokół, J. and Stankiewicz, J. Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions. Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat., 19, 101–105 (1996)

8 Janowski, W. Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families. Ann. Polon Math., 23, 159–177. (1970)

9 Abolfathi, M.A. New subclasses of Ozaka's convex functions. Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 1–11 (2022). http://dx.doi.org/10.22075/ijnaa.2022.28231.4081

10 Khatter, K., Lee, S. K. and Ravichandran, V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744, (2020) doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744

11 Sebastianc, A. and Ravichandran V.. Radius of starlikeness of certain analytic functions. Math. Slovaca 71, 1, 83–104 (2021). doi: 10.1515/ms-2017-0454

12 Singh, V. and Goel, R.M. On radii of convexity and starlikeness of some classes of functions. J. Math. Soc. Japan, 23, 323–339 (1971). doi: https://doi.org/10.2969/jmsj/02320323

13 Reade, M.O. On close-to-close univalent functions. Michigan Math. J., 3, 59–62 (1955).

14 MacGregor, T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, II. Proc. Am. Math. Soc., 14, 521–524 (1963). doi: http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5

15 Chichra, P. On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions. J. of the Australian Math. Soc., 13(2), 208–218 (1972). doi: https://doi.org/10.1017/S1446788700011290

16 Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemisova A.A. and Baimankulov A.T. Ob obobshhenii nekotoryh klassov pochti vypuklyh i tipichno veshhestvennyh funkcij [On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions]. Zhurnal «Vestnik TGU», serija «Matematika. Mehanika», Tomsk, 80, 147–156 (2023). (in Russian) doi: 10.17223/19988621/85/1

17 Nunokawa, M. and Sokół, J. On the order of strong starlikeness and the radii of starlikeness for of some close-to-convex functions. Analysis and Mathematical Physics, 9, 2367–2378 (2019). doi: https://doi.org/10.1007/s13324-019-00340-8

18 Ali, R.M., Ravichandran, V. and Sharma, K. Starlikeness of analytic functions with subordinate ratios. Hindawi J. of Math., Article ID 8373209, 1–8 (2021). https://doi.org/10.1155/2021/8373209

19 Shah, G.M. On the univalence of some analytic functions. Pacific J. Math., 43(1), 239–250 (1972). doi: https://doi.org/10.2140/pjm.1972.43.239

20 Shaffer, D.B. On bounds for the derivative of analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 37, 517–520 (1973). doi: http://dx.doi.org/10.11568/kjm.2021.29.4.785

21 Paprocki, E. and Sokół, J. The extremal problems in some subclass of strongly starlike functions. Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat., 20, 89–94 (1996).

[1]Майер Ф.Ф.,
ф.-м.ғ.к., профессор, ORCID ID 0000-0002-2278-2723, e-mail: maiyer@mail.ru
[1]Тастанов М.Г.,
ф.-м.ғ.к., профессор, ORCID ID 0000-0003-1926-8958, e-mail: tastao@mail.ru
[1]Утемисова А.А.,
пед.ғ.к., ORCID ID 0000-0001-5143-0260, e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]Ысмағұл Р.С.,
ф.-м.ғ.к., профессор, ORCID ID 0009-0007-6594-7958, e-mail: ismagulr@mail.ru

[1]«Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті» КЕАҚ,
Қостанай қ., 110000, Қазақстан

ЖҰЛДЫЗ ПІШІНДІ, ЖАРТЫЛАЙ ЖҰЛДЫЗ ПІШІНДІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЕЙБІР СЫНЫПТАРЫНЫҢ ДӨҢЕС РАДИУСЫ МЕН ЖҰЛДЫЗ ПІШІНДІЛІГІН ЖӘНЕ ТҰРАҚТЫ ФУНКЦИЯНЫ НАҚТЫ БАҒАЛАУ

Аңдатпа

Бірпарақты функциялардың ішкі сыныптарына арналған көптеген есептерде зерттелетін бірпарақты функциялардың ішкі сыныптарына байланысты белгілі бір функционалдарды минимизациялау немесе максимизациялау есептеріне айналдыруға болатыны белгілі. Көбінесе мұндай функционалдық тұрақты функциялардың логарифмдік туындысына тән. Мақалада Р.Гоэль мен Д. Шаффердің тұрақты функциялардың атақты сыныбын жалпылайтын, мәндері шекарада 0 нүктесі бар нақты оське симметриялы шеңберде орналасқан, қатарларға ыдырауы n-ші дәрежеден басталатын, нақты бөлікті бірлік шеңберіндегі тұрақты функциялардың екі параметрлі ішкі сыныбы енгізілді. Функциялардың бұл сыныбында әртүрлі функциялардың, соның ішінде логарифмдік туындының нақты бағалары алынған. Осы бағалаулардың қосымшалары ретінде сынып арқылы берілген жұлдыз тәрізді және жартылай жұлдыз тәрізді функциялардың әртүрлі сыныптарының дөңес (немесе жұлдыз тәрізді) дәл радиустары табылды. Алынған барлық нәтижелер дәл және бұрын белгілі болған көптеген нәтижелерді қорытындылайды. Мақалада алынған бағаларды қолдану бірпарақты функциялардың әртүрлі ішкі сыныптарымен байланысты экстремалды есептер теориясына үлес қосқандықтан перспективаға ие.

Тірек сөздер: тұрақты функцияларды бағалау, бірпарақты функциялар, жұлдыз тәрізді функциялар, дөңес радиусы, жұлдыз тәрізді радиус

[1]**Maiyer F.F.,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, ORCID ID 0000-0002-2278-2723,
e-mail: maiyer@mail.ru
[1]**Tastanov M.G.,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, ORCID ID 0000-0003-1926-8958,
e-mail: tastao@mail.ru
[1]**Utemissova A.A.,**
Candidate of Pedagogical Sciences, ORCID ID 0000-0001-5143-0260,
e-mail: anar_utemisova@mail.ru
[1]**Ysmagul R.S.,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, ORCID ID 0009-0007-6594-7958,
e-mail: ismagulr@mail.ru

[1]Non-commercial joint-stock company «Akhmet Baitursynuly Kostanay Regional University»,
Kostanay 110000, Kazakhstan

EXACT ESTIMATES OF REGULAR FUNCTIONS AND RADII OF CONVEXITY AND STARLIKENESS OF SOME CLASSES OF STARLIKE AND CLOSE-TO-STARLIKE FUNCTIONS

Abstract

It is known that many problems for subclasses of univalent functions can be transformed into problems of minimizing or maximizing some functionals associated with the studied subclasses of univalent functions. Often, the logarithmic derivative of regular functions acts as such a functional. In this paper, we introduce a two-parameter subclass $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ of functions regular in the unit circle with a positive real part, the expansion into a series of which begins with the nth degree. This class generalizes the well-known R.Goel and D.Shaffer class of regular functions whose values are contained in a circle symmetric with respect to the real axis containing the point 0 on the boundary. In this class of functions, exact estimates of various functionals, including the logarithmic derivative, are obtained. As applications of these estimates, the exact radii of convexity (or starlikeness) of various classes of starlike and close-to-starlike functions given using the class $\mathcal{P}_n(a,\gamma)$ are found. All the results obtained are accurate and generalize many of the previously known results. The application of the estimates obtained in the article is promising, as it contributes to the theory of extreme problems associated with various subclasses of univalent functions.

Key words: estimates of regular functions, univalent functions, starlike functions, radius of convexity, radius of starlikeness.