МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICAL SCIENCES
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ӘОЖ 517.927.2
ҒТАХР 27.29.17, 27.41.19

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-106-115

[1, 2]**Кадирбаева Ж.М.,**
ф.-м.ғ. к., қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0001-8861-4100,
e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

[1, 3]**Темешева С.М.,**
ф.-м.ғ.д., қауымдастырылған профессор, ORCID ID: 0000-0002-3341-4539,
e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com

[1, 4]**Минглибаева Б.Б.,**
ф.-м.ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-7195-4480, e-mail: minglibayeva.bayan@gmail.com

[4]**Шаймерден Н.М.,**
магистр, ORCID ID: 0009-0005-5114-7197, e-mail: nurtai777@mail.ru

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, 050010, Алматы қ., Қазақстан
[2]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, 050040, Алматы қ., Қазақстан
[3]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, 050040, Алматы қ., Қазақстан
[4]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, 050000, Алматы қ., Қазақстан

ИМПУЛЬСТІ ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ПАРАМЕТРЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІ САНДЫҚ ШЕШУ

Аңдатпа

Импульсті жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрден тәуелді шеттік есеп қарастырылады. Зерттеліп отырған параметрден тәуелді шеттік есепті сандық шешу мақсатында Жұмабаевтың параметрлеу әдісінің сандық жүзеге асыру алгоритмдері дамытылған. Жұмабаевтың параметрлеу әдісінің сандық жүзеге асыру алгоритмдері жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есептерін шешуге негізделген. Ұсынылған әдісті қолдану нәтижесі импульсті жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін параметрге тәуелді шеттік есептің шешімін табуды алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімін табуға алып келеді. Бұл алгебралық теңдеулер жүйесі шеттік шарт пен импульс нүктелеріндегі шарттарға қатысты теңдіктерден тұрады. Жұмабаевтың параметрлеу әдісін сандық жүзеге асырылуының жоғары тиімділігін көрсететін сандық нәтиже ұсынылған. Мысал нәтижелері сандық және дәл шешімдер арасындағы дәлдіктің сәйкестігі жоғары ретті екенін көрсетеді.

Тірек сөздер: жүктелген дифференциалдық теңдеу, шеттік есеп, импульстік әсер, параметрлеу әдісі.

Кіріспе

Бұл мақалада төменде ұсынылған импульсті жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі шеттік есеп қарастырылады,

$$\frac{du(t)}{dt} = \mathcal{K}_0(t)u(t) + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{K}_i(t) \lim_{t\to\eta_i+0} u(t) + \mathcal{K}_{m+1}(t)\mu + \mathcal{F}(t), \tag{1}$$

$$t \in [0,\ T]\backslash\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}, u \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^l,$$

$$\mathcal{B}_0 u(0) + \mathcal{M}_0 \mu + \mathcal{C}_0 u(T) = d_0,\ d_0 \in \mathbb{R}^{n+l}, \tag{2}$$

$$\mathcal{B}_i \lim_{t\to\eta_i-0} u(t) - \mathcal{C}_i \lim_{t\to\eta_i+0} u(t) = d_i, i = \overline{1,m}, d_i \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

мұндағы $(n \times n)$ – өлшемді $\mathcal{K}_i(t)$, $i = \overline{0,m}$; $(n \times l)$ – өлшемді $\mathcal{K}_{m+1}(t)$ матрицалары және n – өлшемді $\mathcal{F}(t)$ вектор – функциясы $[0,\ T]$ аралығында $t = \eta_i, i = \overline{1,m}$, нүктелерінде бірінші текті үзілістерімен бөлікті-үзіліссіз, $((n+l) \times n)$ – өлшемді $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ матрицалары, $((n+l) \times l)$–өлшемді $\mathcal{M}_0$ матрицасы, $(n \times n)$–өлшемді $\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i, i = \overline{1,m}$, матрицалары – тұрақты матрицалар, $d_i, i = \overline{1,m}, n$ – өлшемді тұрақты векторлар;

$$\|u\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i|,\ 0 = \eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_m < \eta_{m+1} = T.$$

$[0,\ T]$ аралығында $t = \eta_i, i = \overline{1,m}$, нүктелерінде бірінші текті үзілістері болатын $u(t)$ бөлікті-үзіліссіз вектор-функциялар кеңістігін $PC([0,\ T], \eta, \mathbb{R}^n)$ арқылы белгілейік, $\|u\|_1 = \max_{i=\overline{0,m}} \sup_{t\in[\eta_i,\eta_{i+1})} \|u(t)\|$.

(1) – (3) есебінің шешімі деп $(u^*(t), \mu^*)$ жұбын атаймыз, мұнда $u^*(t) \in PC([0,\ T], \eta, \mathbb{R}^n)$ және туындысы $\frac{du^*(t)}{dt} \in PC([0,\ T], \eta, \mathbb{R}^n)$, $\mu^* \in \mathbb{R}^l$, егер осы жұп $t \in [0,\ T]\backslash\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$ үшін (1) жүктелген дифференциалдық теңдеуін, (2) шеттік шартын және (3) импульстік әсерлер шарттарын параметрдің $\mu = \mu^*$ болғандағы мәні үшін қанағаттандыратын болса.

Импульстік дифференциалдық теңдеулер физикада, популяция динамикасында, экологияда, биологиялық жүйелерде, биотехнологияда, өндірістік робототехникада, фармакологияда, тиімді басқаруда және т.б. импульстік есептерді модельдеуге арналған. Импульстік дифференциалдық теңдеулер теориясы [1–5] жұмыстарында кеңінен зерттелген.

Автоматты басқару теориясындағы, ядролық реакторлар теориясының, электротехника мен машина жасаудағы, жер сілкінісін бақылаудағы, динамикалық жүйелердегі есептерді математикалық модельдеу де жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерге әкеледі [6–12].

Жәй дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлері бар шеттік есептерді көптеген ғалымдар кеңінен зерттеген [13–17]. Бұл есептер қолданбалы математиканың әртүрлі салаларында, биофизикада, биомедицинада, химияда қолданылады. Мұндай есептердің шешімін табу үшін дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясының әдістері, параметрлеу әдісі, тиімділеу теориясы, жоғарғы және төменгі шешімдер әдісі және т.б. әдістер қолданылған.

Бұл мақалада импульсті жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі шеттік есепті шешу үшін профессор Жұмабаев ұсынған параметрлеу әдісінің [18, 19] сандық жүзеге асырылуы қолданылады. Осы параметрлеу әдісін дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі кластары үшін есептерді шешуде қолдануын [20–25] жұмыстарынан көруге болады.

Негізгі ережелер

Параметрлеу әдісінің схемасын пайдаланып, берілген $[0,T]$ аралығын келесідей бөліктерге бөлейік:

$$[0,T)=\bigcup_{r=1}^{m+1}[\eta_{r-1},\eta_r).$$

$C\big([0,T],\eta,\mathbb{R}^{n(m+1)}\big)$ кеңістігін енгізейік:

1) $C\big([0,T],\eta,\mathbb{R}^{n(m+1)}\big)$ кеңістігі $u[t]=\big(u_1(t),u_2(t),\dots,u_{m+1}(t)\big)$ функциялар жүйесінен тұрады, мұндағы $u_r\colon[\eta_{r-1},\eta_r)\to\mathbb{R}^n$ функциялары $[\eta_{r-1},\eta_r), r=\overline{1,m+1}$, аралықтарында үзіліссіз және барлық $r=\overline{1,m+1}$ үшін $\lim\limits_{t\to\eta_r-0}u_r(t)$ ақырлы сол жақ шектері бар;

2) $C\big([0,T],\eta,\mathbb{R}^{n(m+1)}\big)$ кеңістігіндегі $u[t]$ функциялар жүйесінің нормасы $\|u[\cdot]\|_2=\max\limits_{r=\overline{1,m+1}}\sup\limits_{t\in[\eta_{r-1},\eta_r)}\|u_r(t)\|$ түрінде болады.

Ізделінді $u(t)$ функциясының $t\in[\eta_{r-1},\eta_r), r=\overline{1,m+1}$, аралықтарға сығылуын $u_r(t)$ деп белгілеп, қосымша $v_r=u_r(\eta_{r-1}), r=\overline{1,m+1}$, параметрлерін енгізейік. Ал енді $v=(v_1,v_2,\dots,v_{m+1},v_{m+2})$ векторын құрайық, мұндағы ең соңғы компонент (1) – (3) есебіндегі μ параметрі, яғни $v_{m+2}=\mu$.

Әрбір $[\eta_{r-1},\eta_r), r=\overline{1,m+1}$, аралықтарында $w_r(t)=u_r(t)-v_r, r=\overline{1,m+1}$, алмастырып, келесідей (1)-(3) есебіне пара-пар параметрлері бар шеттік есепке көшеміз:

$$\frac{dw_r}{dt}=\mathcal{K}_0(t)(w_r+v_r)+\sum_{i=1}^{m+1}\mathcal{K}_i(t)v_{i+1}+\mathcal{F}(t),\quad t\in[\eta_{r-1},\eta_r),\ r=\overline{1,m+1},\tag{4}$$

$$w_r(\eta_{r-1})=0, r=\overline{1,m+1},\tag{5}$$

$$\mathcal{B}_0v_1+\mathcal{M}_0v_{m+2}+\mathcal{C}_0v_{m+1}+\mathcal{C}_0\lim_{t\to T-0}w_{m+1}(t)=d_0,\tag{6}$$

$$\mathcal{B}_iv_i+\mathcal{B}_i\lim_{t\to\eta_i-0}w_i(t)-\mathcal{C}_iv_{i+1}=d_i, i=\overline{1,m}.\tag{7}$$

(4) – (7) есебінің шешімі деп $v^*=(v_1^*,v_2^*,\dots,v_{m+1},v_{m+2}^*)\in\mathbb{R}^{n(m+1)+l}$, $w^*[t]=\big(w_1^*(t),w_2^*(t),\dots,w_{m+1}^*(t)\big)\in C\big([0,T],\eta,\mathbb{R}^{n(m+1)}\big)$ элементтері бар $(v^*,w^*[t])$ жұбын айтамыз, мұндағы $w_r^*(t)$ функциялары $[\eta_{r-1},\eta_r), r=\overline{1,m+1}$,

аралықтарында үзіліссіз дифференциалданады және (4) жәй дифференциалдық теңдеулерін, $\nu_r = \nu_r^*, r = \overline{1, m+2}$, болғанда (5) – (7) шарттарын қанағаттандырады.

Бастапқы берілген (1) – (3) және параметрлері бар (4) – (7) есептері пара-пар есептер болып табылады. Егер $(u^*(t), \mu^*)$ жұбы бастапқы берілген (1) – (3) есебінің шешімі болса, онда келесі $(w^*[t], \nu^*)$ жұбы, мұндағы

$$w^*[t] = \big(u^*(t) - u^*(\eta_0), u^*(t) - u^*(\eta_1), \dots, u^*(t) - u^*(\eta_m)\big),$$
$$\nu^* = (u^*(\eta_0), u^*(\eta_1), \dots, u^*(\eta_m), \mu^*)$$

параметрлері бар (4) – (7) есебінің шешімі болады. Ал енді керісінше, егер де $(\widehat{w}[t], \hat{\nu})$ жұбы параметрлері бар (4) – (7) есебінің шешімі болса, онда

$$\hat{u}(t) = \hat{\nu}_r + \widehat{w}_r(t),\ t \in [\eta_{r-1}, \eta_r),\ r = \overline{1, m+1},$$
$$\hat{u}(T) = \hat{\nu}_{m+1} + \lim_{t \to T-0} \widehat{w}_{m+1}(t),\ \hat{\mu} = \hat{\nu}_{m+2},$$

теңдіктерімен анықталатын $(\hat{u}(t), \hat{\mu})$ жұбы бастапқы берілген (1) – (3) есебінің шешімі болады.

Материалдар мен әдістер

Қосымша параметрлерді енгізу $w[t] = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_{m+1}(t))$ белгісіз функциялар жүйесінің компоненттері үшін $w_r(\eta_{r-1}) = 0, r = \overline{1, m+1}$, бастапқы мәндерін алуға мүмкіндік береді және де $\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \dots, \tilde{\nu}_{m+2})$ параметрлерінің бекітілген мәндерінде (4), (5) есептері Коши есептері болып табылады. Бұл Коши есептері $[\eta_{r-1}, \eta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, аралықтарында жеке-жеке шешіледі де, шешімдерін табу үшін іргелі матрица қолданылады.

$[\eta_{r-1}, \eta_r), r = \overline{1, m+1}$, аралықтарында $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ дифференциалдық теңдеуінің $\Phi_r(t)$ – іргелі матрицасын қолданып (4), (5) Коши есебінің шешімін келесі түрде жазайық:

$$w_r(t) = \Phi_r(t) \int_{\eta_{r-1}}^{t} \Phi_r^{-1}(\tau)\mathcal{K}_0(\tau)\nu_r d\tau + \Phi_r(t) \int_{\eta_{r-1}}^{t} \Phi_r^{-1}(\tau) \sum_{j=1}^{m+1} \mathcal{K}_j(\tau)\nu_{j+1} d\tau +$$

$$+\Phi_r(t) \int_{\eta_{r-1}}^{t} \Phi_r^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau) d\tau, \qquad t \in [\eta_{r-1}, \eta_r), \mathrm{r} = \overline{1, m+1}. \quad (8)$$

Бұл соңғы өрнекті шешіп, $w(t)$ мәнін $\nu \in \mathbb{R}^{n(m+1)+l}$ және $\mathcal{F}(t)$ терминдерінде табамыз. Осы (8) өрнегін (6) және (7) шарттарына қою арқылы $\nu \in \mathbb{R}^{n(m+1)+l}$ белгісіз параметрлерін табуға арналған келесідей жүйені аламыз:

$$\mathcal{B}_0\nu_1 + \mathcal{M}_0\nu_{m+2} + \mathcal{C}_0\nu_{m+1} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathcal{C}_0\Phi_{m+1}(T)\int_{\eta_m}^{T}\Phi_{m+1}^{-1}(\tau)\left[\mathcal{K}_0(\tau)\nu_{m+1}+\sum_{j=1}^{m+1}\mathcal{K}_j(t)\nu_{j+1}\right]d\tau=\\
&=d_0-\mathcal{C}_0\Phi_{m+1}(T)\int_{\eta_m}^{T}\Phi_{m+1}^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_i\nu_i+\mathcal{B}_i\Phi_i(\eta_i)\int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i}\Phi_i^{-1}(\tau)\left[\mathcal{K}_0(\tau)\nu_i+\sum_{j=1}^{m+1}\mathcal{K}_j(t)\nu_{j+1}\right]d\tau-\mathcal{C}_i\nu_{i+1}=\\
&=d_i-\mathcal{B}_i\Phi_i(\eta_i)\int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i}\Phi_i^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau,\quad i=\overline{1,m}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Осы (9), (10) жүйесінің сол жағындағы белгісіз параметрлер алдындағы коэффициенттерден тұратын матрицаны Q(η) деп белгілеу арқылы осы (9), (10) жүйесін келесі түрде жазайық

$$
Q(\eta)\nu=\mathcal{F}(\eta),\nu\in\mathbb{R}^{n(m+1)+l},
\tag{11}
$$

мұндағы

$$
\mathcal{F}(\eta)=\left(d_0-\mathcal{C}_0\Phi_{m+1}(t)\int_{\eta_m}^{T}\Phi_{m+1}^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau,\right.
$$

$$
\left.d_1-\mathcal{B}_1\Phi_1(t)\int_{\eta_0}^{\eta_1}\Phi_1^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau,\dots,d_m-\mathcal{B}_m\Phi_m(t)\int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m}\Phi_m^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau\right)'
$$

Бастапқы берілген (1) – (3) шеттік есебінің шешілімділігі (11) жүйесінің шешілімділігіне пара-пар екенін көрсету қиын емес.

Нәтижелер мен талқылау

(1) – (3) есебін сандық шешу алгоритмі. Алгоритмді ұсынбас бұрын ішкі аралықтарда жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есептерін қарастырайық:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt}=\mathcal{K}_0(t)y+\mathcal{P}(t),\\
&y(\eta_{r-1})=0,t\in[\eta_{r-1},\eta_r),r=\overline{1,m+1},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

мұндағы $\mathcal{P}(t)$ – $(n\times n)$ өлшемді матрица, немесе n өлшемді вектор, екеуі де $[\eta_{r-1},\eta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, аралығында үзіліссіз. (12) Коши есебінің шешімі матрица немесе вектор болып табылады. Осы шешімді $a(P,t)$ деп белгілейік. Олай болса,

$$
a(P,t)=\Phi_r(t)\int_{\eta_{r-1}}^{t}\Phi_r^{-1}(\tau)\mathcal{P}(\tau)d\tau,t\in[\eta_{r-1},\eta_r],r=\overline{1,m+1}.
$$

Ұсынылып отырған сандық әдіс (11) жүйені құруға және шешуге негізделген. (9), (10) теңдеулерінен көрініп тұрғандай (11) жүйенің коэффициенттері мен оң жағы жәй дифференциалдық теңдеулер үшін матрицалық және векторлық Коши есептерінің шешімі ретінде:

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{K}_0(t)y + \mathcal{K}_j(t), y(\eta_{r-1}) = 0,$$
$$t \in [\eta_{r-1}, \eta_r], r = \overline{1, m+1}, j = \overline{0, m+2}, \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{K}_0(t)y + \mathcal{F}(t), y(\eta_{r-1}) = 0, t \in [\eta_{r-1}, \eta_r], r = \overline{1, m+1}. \tag{14}$$

$0 = \eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_m < \eta_{m+1} = T$ аралығын қарастырайық. Әрбір $[\eta_{r-1}, \eta_r], r = \overline{1, m+1}$, аралығын $h_r = (\eta_r - \eta_{r-1})/N_r$ қадаммен $N_r, r = \overline{1, m+1}$, бөліктерге бөлеміз. (11) жүйенің коэффициентері мен оң жағының жуық мәндерін әрбір ішкі аралықта h_r қадаммен 4-ші ретті Рунге-Кутта әдісінің көмегімен (13), (14) матрицалық және векторлық Коши есептерін шешу арқылы табамыз. Яғни $a_r(\mathcal{K}_j, \hat{\eta}), j = \overline{0, m+2}$, $r = \overline{1, m+1}$, $(n \times n)$-матрицалары мен $a_r(\mathcal{F}, \hat{\eta}), r = \overline{1, m+1}$, n-векторының мәндерін табамыз.

Сонда келесі жуық жүйені аламыз:

$$Q_*^{\tilde{h}}(\eta)\nu = -\mathcal{F}_*^{\tilde{h}}(\eta), \nu \in \mathbb{R}^{n(m+1)+l}, \tag{15}$$

Бұл (15) жүйесінің шешімі $\nu^{\tilde{h}}$. Жоғарыда айтқандай: $u^{\tilde{h}_r}(\eta_{r-1}) = \nu_r^{\tilde{h}}, \mathrm{r} = 1{:}(m+1)$, $\mu^{\tilde{h}_r} = \nu_{m+2}^{\tilde{h}}$. Ішкі аралықтардың қалған нүктелеріндегі шешімнің жуық мәндері келесідей Коши есептерінің шешімдерімен анықталады:

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{K}_0(t)\mathrm{u} + \sum_{i=1}^{m+1} \mathcal{K}_i(t)\nu_{i+1}^{\tilde{h}} + \mathcal{F}(t), \tag{16}$$

$$u(\eta_{r-1}) = \nu_r^{\tilde{h}}, t \in [\eta_{r-1}, \eta_r], r = \overline{1, m+1}. \tag{17}$$

Соңғы (16), (17) Коши есептерін 4-ші ретті Рунге-Кутта әдісімен шеше отырып, (1) – (3) импульсті жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрі бар шеттік есептің сандық шешімін табамыз. Бастапқы берілген (1) – (3) импульсті жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрі бар шеттік есептің сандық шешімін табу алгоритмінің жүзеге асырылуын көрсету үшін келесі мысалды қарастырайық.

Мысал. Импульсті жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрі бар шеттік есепті қарастырайық:

$$\frac{du(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 3t^4 & t-5 \\ 7 & t^3 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 4 & 12t \\ 2t^3 & 8 \end{pmatrix} \lim_{t \to \frac{1}{2}+0} u(t) +$$
$$+ \begin{pmatrix} t & 3 & t^4 \\ 0 & 3t^2 - 3 & 12 \end{pmatrix} \mu + \mathcal{F}(t), t \in [0,\ T] \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}, u \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}^3, \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 7 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(0) + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -8 \\ -3 & 11 & 8 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 9 & 0 \\ 3 & 4 \\ -6 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(T) = \begin{pmatrix} 59 \\ 432 \\ -105 \\ 281 \\ 221 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \lim_{t \to \frac{1}{2}-0} u(t) - \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \lim_{t \to \frac{1}{2}+0} u(t) = \begin{pmatrix} 83 \\ 97 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} 26t^2 - 8t^5 - 12t^4 - 21t^7 + 48t - 125 \\ 5t^4 - 8t^7 - 48t^3 - 63t^2 - 307 \end{pmatrix}, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right);$$

$$\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} 20t^2 - 70t^4 - 4t^3 - 15t^5 + 81t - 160 \\ -4t^5 - 23t^3 - 63t^2 - 27t - 244 \end{pmatrix}, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

(18) – (20) есебін шешу үшін параметрлеу әдісінің жоғарыда ұсынылған сандық жүзеге асырылуын қолданамыз. Яғни (15) теңдеулер жүйесін шешіп, параметрлердің сандық мәндерін аламыз

$$\nu_1^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 6.99998828 \\ -0.000032228 \end{pmatrix}, \nu_2^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 15.500002645 \\ -6.999990617 \end{pmatrix}, \nu_3^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 10.999997352 \\ 21.00000678 \\ 30.999990026 \end{pmatrix}.$$

Ішкі аралықтардың қалған нүктелерінде сандық шешімдерін (16), (17) Коши есептерін 4-ші ретті Рунге-Кутта әдісін қолдана отырып, шешу арқылы табамыз.

(18) – (20) есебінің дәл шешімі: $(u^*(t), \mu^*)$,

мұндағы $u^*(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 7t^3 + 7 \\ 8t^4 - 5t \end{pmatrix}, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ \begin{pmatrix} 5t + 13 \\ 4t^2 - 8 \end{pmatrix}, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases} \quad \mu^* = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix}.$

Кесте 1 – (18) – (20) есебінің сандық шешімінің мәндері.

t	$\tilde{u}_1(t)$	$\tilde{u}_2(t)$	t	$\tilde{u}_1(t)$	$\tilde{u}_2(t)$
0	6.99998828	-0.000032228	0.5	15.500002645	-6.999990617
0.05	7.000872683	-0.249987604	0.55	15.750001343	-6.789991693
0.1	7.007008044	-0.499238179	0.6	16.000000628	-6.559992901
0.15	7.023642901	-0.745983849	0.65	16.250000499	-6.309993993
0.2	7.056025882	-0.987225007	0.7	16.500000915	-6.039994727
0.25	7.109405819	-1.218762486	0.75	16.750001805	-5.74999487
0.3	7.18903184	-1.435197465	0.8	17.000003077	-5.439994205
0.35	7.300153421	-1.629931343	0.85	17.250004632	-5.109992532
0.4	7.448020406	-1.795165604	0.9	17.500006374	-4.759989663
0.45	7.637882984	-1.921901688	0.95	17.750008215	-4.389985413
0.5	7.87499164	-1.999940869	1	18.000010081	-3.999979585

1-кестенің жалғасы

$\tilde{\mu}_1 = \nu_{31}^{\tilde{h}}$	$\tilde{\mu}_2 = \nu_{32}^{\tilde{h}}$	$\tilde{\mu}_3 = \nu_{33}^{\tilde{h}}$
10.999997352	21.00000678	30.999990026

Есептің $(u^*(t),\mu^*)$ дәл шешімі мен $(\tilde{u}(t),\tilde{\mu})$ сандық шешімдерінің арасындағы айырым үшін келесі бағалауды аламыз:

$$\max_{j=0,20}\|u^*(t_j)-\tilde{u}(t_j)\| < 0.00006 \text{ және } \max\|\mu^*-\tilde{\mu}\| < 0.00001.$$

Қорытынды

Бұл жұмыста импульсті жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі шеттік есебінің сандық шешімін табу үшін профессор Жұмабаев ұсынған параметрлеу әдісінің сандық жүзеге асырылуы қолданылды. Әрі қарай осы әдісті импульсті интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі шеттік есебі үшін де қарастыру көзделіп отыр.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP19675193) қаржыландырады.

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Samoilenko A.M. and N.A. Perestyuk (1995) Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore.
2 Bainov D. and P. Simenov (1993) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications, Part of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Longman Sci. Tech. Harlow.
3 Lakshmikantham V., Bainov D.D. and P.S. Simenov (1989) Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore.
4 Akhmetov M.U. and Zafer A. (2000) Appl.Math. Lett. 13, pp. 99–105 https://doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00040-9.
5 Nieto J.J. and D. O'Regan, Nonlin. (2009). Anal.: Real World Appl. 10, pp. 680–690 https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2007.10.022.
6 Nakhushev A.M. (1982) Differ. Equat. 18, pp. 72–81.
7 Yuldashev T.K., Islomov B.I. and Alikulov E.K. (2020). Lobachevskii J.Math. 41, pp. 926–944. https://doi.org/10.1134/S1995080220050145.
8 Yuldashev T.K. and Abdullaev O.Kh. (2021) Lobachevskii J.Math. 42, pp. 1113–1123. https://doi.org/10.1134/S1995080221050218.
9 Abdullaev V.M. and Aida-zade K.R. (2014) Comput.Math. Math. Phys. 54, pp. 1096–1109. https://doi.org/10.1134/S0965542514070021.
10 Dzhenaliev M.T. (2001) Differ. Equat. 37, pp. 51–57.
11 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. and Mynbayeva S.T. (2020). Math. Methods Appl. Sci. 4, pp.1788–1802. https://doi.org/10.1002/mma.6003.
12 Assanova A.T., Imanchiyev A.E. and. Kadirbayeva Zh.M. (2018). Comput.Math. Math. Phys. 58, pp. 508–516. https://doi.org/10.1134/S096554251804005X.
13 Akhmetov M.U., Zafer A. and Sejilova R.D. Nonlin. (2002). Anal. 48, pp. 271–286. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(00)00186-3.
14 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. and Uteshova R.E. (2020) Comput. Appl. Math. 39, 248. https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298-1.
15 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Kadirbayeva Zh.M. (2020). Comput.Math. Math. Phys. 60, pp. 203–221. https://doi.org/10.1134/S0965542520020049.

16 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Kadirbayeva Zh.M. (2021). Math. Model. Anal. 26, pp. 34–54. https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977.

17 Minglibayeva B.B. and Assanova A.T. (2021). Lobachevskii J. Math. 42, pp. 587–597. https://doi.org/10.1134/S199508022103015X.

18 Dzhumabayev D.S. (1989). USSR Comput.Math. Math. Phys. 29, pp. 34–46.

19 Dzhumabaev D.S., J. (2016). Comput. Appl.Math. 294, pp. 342–357 http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2015.08.023.

20 Assanova A.T. and Kadirbayeva Zh.M. (2018). Comput. Appl. Math. 37, pp. 4966–4976. https://doi.org/10.1007/s40314-018-0611-9.

21 Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S. and Kabdrakhova S.S. (2021). Lobachevskii journal of mathematics. 42, 606-612. https://doi.org/10.1134/S1995080221030173.

22 Kadirbayeva Zh.M. and Kabdrakhova S.S. (2022). Open Math. 20, pp. 1173–1183. https://doi.org/10.1515/math-2022-0496.

23 Kadirbayeva Zh.M., Kabdrakhova S.S. and Mynbayeva S.T. (2021). Lobachevskii J.Math. 42, pp. 3675–3683. https://doi.org/10.1134/S1995080222030131.

24 Bakirova E.A., Tleulesova A.B. and Kadirbayeva Zh.M. (2017). Bull. Karag. Univ.,Math. 87 (3), pp. 43–50.

25 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Vassilina G.K. (2020). Analysis. 4, pp. 175–191 https://doi.org/10.1515/anly-2019-0021.

[1,2]Kadirbayeva Zh.M.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0001-8861-4100, e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

[1,3]Temesheva S.M.,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
ORCID ID: 0000-0002-3341-4539, e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com

[1,4]Minglibayeva B.B.,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, ORCID ID: 0000-0002-7195-4480,
e-mail: minglibayeva.bayan@gmail.com

[4]Shaimerden N.M.,
Master, ORCID ID: 0009-0005-5114-7197, e-mail: nurtai777@mail.ru

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan
[2]International Information Technology University, 050040, Almaty, Kazakhstan
[3]Al-Farabi Kazakh National University, 050040, Almaty, Kazakhstan
[4]Kazakh National Women's Teacher Training University, 050000, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A PARAMETER FOR IMPULSIVE LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

The boundary value problem depending on the parameter for the system of impulsive loaded differential equations is considered. Algorithms of numerical realization of the Dzhumabaev parameterization method are developed for numerical solving of the studied boundary value problem depending on the parameter. Algorithms of numerical realization of the Dzhumabaev parameterization method are based on the solving of Cauchy problems for the system of ordinary differential equations. As a result of application of the proposed method, finding a solution to the boundary value problem depending on the parameter for impulsive loaded differential equations leads to finding a solution to the system of algebraic equations. This system of algebraic equations consists of a boundary condition and equalities with respect to the conditions at the impulsive points. Numerical results showing the high efficiency of the numerical implementation of the Dzhumabaev parameterization method are given. The result demonstrate that there is congruence between the numerical and the exact results to a high order of accuracy.

Key words: loaded differential equation, boundary value problem, impulse effect, parametrization method.

[1,2]Кадирбаева Ж.М.,
канд. физ.-мат.наук, ассоц. профессор, ORCID ID: 0000-0001-8861-4100,
e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

[1,3]Темешева С.М.,
докт. физ.-мат.наук, ассоц. профессор,ORCID ID: 0000-0002-3341-4539,
e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com

[1,4]Минглибаева Б.Б.,
канд. физ.-мат.наук, ORCID ID: 0000-0002-7195-4480, e-mail: minglibayeva.bayan@gmail.com

[4]Шаймерден Н.М.,
магистр, ORCID ID: 0009-0005-5114-7197, e-mail: nurtai777@mail.ru

[1]Институт математики и математического моделирования,
050010, г. Алматы, Казахстан
[2]Международный университет информационных технологий,
050040, г. Алматы, Казахстан
[3]Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
050040, г. Алматы, Казахстан
[4]Казахский национальный женский педагогический университет,
050000, г. Алматы, Казахстан

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

Рассматривается краевая задача, зависящая от параметра для системы импульсных нагруженных дифференциальных уравнений. Для численного решения исследуемой краевой задачи, зависящей от параметра, разработаны алгоритмы численной реализации метода параметризации Джумабаева. Алгоритмы численной реализации метода параметризации Джумабаева основаны на решении задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате применения предложенного метода нахождение решения краевой задачи, зависящей от параметра для импульсных нагруженных дифференциальных уравнений, приводит к нахождению решения системы алгебраических уравнений. Эта система алгебраических уравнений состоит из граничного условия и равенств относительно условий в точках импульса. Приведены численные результаты, показывающие высокую эффективность численной реализации метода параметризации Джумабаева. Результаты примера показывают, что существует соответствие между численными и точными результатами с высоким порядком точности.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, краевая задача, импульсное воздействие, метод параметризации.