

УДК 621.865.8  
МРНТИ 55.30.03

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА ВИДА 3-PRRS

Ж.Ж. БАЙГУНЧЕКОВ, Р.А. КАЙЫРОВ

*Казахский Национальный университет им. аль-Фараби*

**Аннотация:** В данной работе на основе ранее полученных постоянных и переменных параметров, характеризующих геометрию бинарных звеньев и относительные движения элементов кинематических пар, составлены матрицы бинарных звеньев и кинематических пар параллельного манипулятора вида 3-PRRS. При решении обратной задачи кинематики рассматриваемого параллельного манипулятора использованы эти матрицы преобразования.

**Ключевые слова:** параллельный манипулятор, трипод, обратная кинематика, постоянные параметры, переменные параметры, рабочая зона, кинематическая пара, матрица преобразования, гидроцилиндр

### INVERSE KINEMATICS OF 3PRRS TYPE PARALLEL MANIPULATOR

**Abstract:** In this paper, on the basis of previously obtained constant and variable parameters characterizing the geometry of binary links and the relative motions of elements of kinematic pairs, the matrices of binary links and kinematic pairs of 3-PRRS type parallel manipulator are composed. Using these transformation matrices, the inverse kinematics problem of the considered parallel manipulator is solved.

**Keywords:** Parallel manipulator, tripod, inverse kinematics, constant parameters, variable parameters, workspace, kinematic pair, transformation matrix, hydraulic cylinder

### 3-PRRS ТҮРДЕГІ ПАРАЛЛЕЛЬ МАНИПУЛЯТОРДЫҢ КЕРІ КИНЕМАТИКАЛЫҚ ЕСЕБІ

**Аңдатпа:** Берілген жұмыста бұрын алынған тұрақты және айнымалы параметрлер негізінде бинарлы звенолардың геометриясын және кинематикалық жұптардың элементтерінің салыстырмалы қозғалысын сипаттайтын 3-PRRS түрдегі параллель манипулятордың бинарлы звеноларының және кинематикалық жұптарының матрицалары құрылды. Осы түрлендіру матрицаларын пайдаланып, қарастырылып отырған манипулятордың кері кинематикалық есебі шығарылды.

**Түйінді сөздер:** параллель манипулятор, трипод, кері кинематика, тұрақты параметрлер, айнымалы параметрлер, жұмыс аймағы, кинематикалық жұп, түрлендіру матрицасы, гидроцилиндр

#### Введение

В данной работе рассматривается решение обратной задачи кинематики исследуемого параллельного манипулятора, т.е. по заданным положениям подвижной платформы определяются переменные параметры входных кинематических пар, которые, как известно, используются для управления движением манипуляционных роботов [7-8].

Параллельный манипулятор трипод вида 3-PRRS с тремя ногами по сравнению с параллельными манипуляторами-гексаподами с шестью ногами обладает большой рабочей зоной, малой металлоемкостью и простой сингулярной конфигурацией [1-6].

**1. Матрицы преобразования**

Рассмотрим одну ногу  $OABCD$  (рис.1) из трех идентичных ног исследуемого параллельного манипулятора вида 3-PRRS.

В работе [1] с каждым элементом кинематических пар жестко соединены системы координат  $U_jV_jW_j$  и  $X_kY_kZ_k$ , ( $j, k = 1, 2, 3, 4$ ) и определены постоянные и переменные параметры. На основе этих постоянных и переменных параметров составим матрицы геометрии звеньев  $G_{jk}$  и матрицы кинематических пар  $P_j$ .

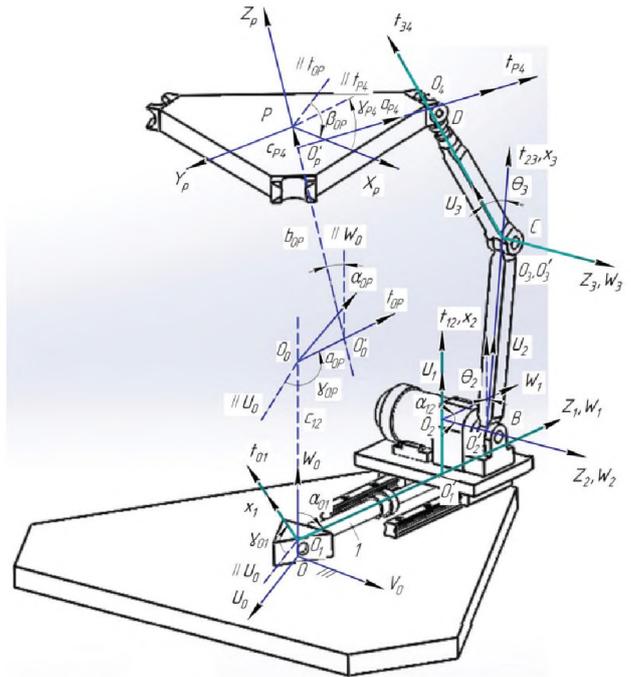


Рис. 1 – Нога  $OABCD$  параллельного манипулятора вида 3-PRRS

$$G_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_{01} & 0 & \sin \gamma_{01} \\ 0 & \sin \gamma_{01} & 0 & -\cos \gamma_{01} \\ c_{01} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 \\ 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$G_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$G_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{34} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Матрица перехода от абсолютной системы координат  $O_0U_0V_0W_0$  к системе  $PX_PY_PZ_P$ ,

жестко соединенной с подвижной платформой, имеет вид

$$T_{OP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{OP} \cdot c\gamma_{OP} + b_{OP} \cdot s\gamma_{OP} \cdot s\alpha_{OP} & c\gamma_{OP} \cdot c\beta_{OP} - s\gamma_{OP} \cdot c\alpha_{OP} \cdot s\beta_{OP} & -c\gamma_{OP} \cdot s\beta_{OP} - s\gamma_{OP} \cdot c\alpha_{OP} \cdot c\beta_{OP} & s\gamma_{OP} \cdot s\alpha_{OP} \\ a_{OP} \cdot s\gamma_{OP} - b_{OP} \cdot c\gamma_{OP} \cdot s\alpha_{OP} & s\gamma_{OP} \cdot c\beta_{OP} + c\gamma_{OP} \cdot c\alpha_{OP} \cdot s\beta_{OP} & c\gamma_{OP} \cdot c\alpha_{OP} \cdot c\beta_{OP} - s\gamma_{OP} \cdot s\beta_{OP} & -c\gamma_{OP} \cdot s\alpha_{OP} \\ c_{OP} + b_{OP} \cdot c\alpha_{OP} & s\alpha_{OP} \cdot s\beta_{OP} & s\alpha_{OP} \cdot c\beta_{OP} & c\alpha_{OP} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

## 2. Решение обратной задачи кинематики

В обратной задаче кинематики исследуемого параллельного манипулятора по заданным положениям подвижной платформы относительно абсолютной системы координат  $OU_0V_0W_0$ , определяемые матрицей  $\mathbf{T}_{OP}$  (8), необходимо определить положения входных звеньев. Переменными параметрами входных звеньев рассматриваемой ноги  $OABCD$

являются  $s_1$  и  $\theta_2$ , т.е. ходштока гидроцилиндра 1 и угол поворота звена 2. Остальные две ноги данного параллельного манипулятора имеют по две аналогичные входные переменные параметры.

Определим координаты центра сферического шарнира  $D$  через систему координат  $PX_pY_pZ_p$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U_D \\ V_D \\ W_D \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{OP} \cdot \mathbf{T}_{P4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где матрица перехода от системы координат  $PX_pY_pZ_p$  к центру сферического шарнира  $D$  имеет вид

$$\mathbf{T}_{P4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{P4} \cdot c\gamma_{P4} & c\gamma_{P4} & -s\gamma_{P4} \cdot c\alpha_{P4} & s\gamma_{P4} \cdot s\alpha_{P4} \\ a_{P4} \cdot s\gamma_{P4} & s\gamma_{P4} & c\gamma_{P4} \cdot c\alpha_{P4} & -c\gamma_{P4} \cdot s\alpha_{P4} \\ c_{P4} & 0 & s\alpha_{P4} & c\alpha_{P4} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Подставляя данную матрицу  $\mathbf{T}_{P4}$  в уравнение (9), получим

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U_D \\ V_D \\ W_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_{OP} \cdot s\alpha_{OP} \cdot s\gamma_{OP} + a_{OP} \cdot c\gamma_{OP} + a_{P4} \cdot c\gamma_{P4} \cdot (c\beta_{OP} \cdot c\gamma_{OP} - c\alpha_{OP} \cdot s\beta_{OP} \cdot s\gamma_{OP}) - a_{P4} \cdot s\gamma_{P4} \cdot (c\gamma_{OP} \cdot s\beta_{OP} + c\alpha_{OP} \cdot c\beta_{OP} \cdot s\gamma_{OP}) + c_{P4} \cdot s\alpha_{OP} \cdot s\gamma_{OP}}{a_{OP} \cdot s\gamma_{OP} + a_{P4} \cdot c\gamma_{P4} \cdot (c\beta_{OP} \cdot s\gamma_{OP} + c\alpha_{OP} \cdot c\gamma_{OP} \cdot s\beta_{OP}) - a_{P4} \cdot s\gamma_{P4} \cdot (s\beta_{OP} \cdot s\gamma_{OP} - c\alpha_{OP} \cdot c\beta_{OP} \cdot c\gamma_{OP}) - b_{OP} \cdot c\gamma_{OP} \cdot s\alpha_{OP} - c_{P4} \cdot c\gamma_{OP} \cdot s\alpha_{OP}} \\ c_{OP} + b_{OP} \cdot c\alpha_{OP} + a_{P4} \cdot c\beta_{OP} \cdot s\alpha_{OP} \cdot s\gamma_{P4} + a_{P4} \cdot c\gamma_{P4} \cdot s\alpha_{OP} \cdot s\beta_{OP} + c_{P4} \cdot c\alpha_{P4} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Теперь определим координаты центра сферического шарнира  $D$  через матрицы преобразования ноги  $OABCD$  уравнением

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U_D \\ V_D \\ W_D \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{01} \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{G}_{12} \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{G}_{23} \cdot \mathbf{G}_{34} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-b_{12}c\gamma_{01} + s_1s\gamma_{01} - a_{23}s\gamma_{01}s\theta_2 - a_{34}s\gamma_{01}s(\theta_2 + \theta_3)}{-b_{12}s\gamma_{01} - s_1c\gamma_{01} + a_{23}c\gamma_{01}s\theta_2 + a_{34}c\gamma_{01}s(\theta_2 + \theta_3)} \\ c_{01} + a_{12} + a_{23}c\theta_2 + a_{34}c(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Приравнивая правые части уравнений (11) и (12), получим

$$\left. \begin{aligned} -b_{12}c\gamma_{01} + s_1s\gamma_{01} - a_{23}s\gamma_{01}s\theta_2 - a_{34}s\gamma_{01}s(\theta_2 + \theta_3) &= U_D \\ -b_{12}s\gamma_{01} - s_1c\gamma_{01} + a_{23}c\gamma_{01}s\theta_2 + a_{34}c\gamma_{01}s(\theta_2 + \theta_3) &= V_D \\ c_{01} + a_{12} + a_{23}c\theta_2 + a_{34}c(\theta_2 + \theta_3) &= W_D \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где  $U_D, V_D, W_D$  являются известными величинами, определяемые уравнением (11).

Анализ системы уравнений (13) показал, что первые два уравнения являются линейно зависимыми. Следовательно, один из параметров  $s_1, \theta_2$  и  $\theta_3$  можно выбрать свободным. Действительно, как видно из рисунка 1, заданное положение точки  $D$  подвижной платформы обеспечивается при различных положениях штока гидроцилиндра 1, т.е. параметр  $s_1$ ,

удовлетворяющий условию  $|l_{o_2D}| \geq a_{23} + a_{34}$ .

После преобразования первого и третьего уравнений системы (13) получим

$$I \cdot \sin^2 \theta_2 - J \cdot \sin \theta_2 + K = 0, \quad (14)$$

где  $I, J, K, Q, M$  – известные параметры,

включая  $s_1$  и  $\cos \theta_3$ .  $I = (s_1 - Q)^2 + M^2$ ,

$J = 2 \cdot (a_{23} + a_{34} \cdot \cos \theta_3) \cdot (s_1 - Q)$ ,

$K = (a_{23} + a_{34} \cdot \cos \theta_3)^2 - M^2$ ,

$Q = \frac{U_D + b_{12} \cdot \cos \gamma_{01}}{\sin \gamma_{01}}$ ,  $M = W_D - c_{01} - a_{12}$ ,

**Таблица 1**

$i$	$a_{OP}$	$\alpha_{OP}$	$b_{OP}$	$\beta_{OP}$	$c_{OP}$	$\gamma_{OP}$
1	3.5227	-0.3681	2.1350	-0.8027	78.0080	0.7680
2	3.5949	-0.2461	0.6570	-0.7930	79.4036	0.7777
3	3.5118	-0.4885	1.7399	-0.8164	78.4635	0.7543
4	3.5341	-0.1233	5.8025	2.3542	84.2415	-2.3581
5	3.5300	-0.2462	3.0123	2.3485	87.0785	-2.3638
6	3.5227	-0.3681	2.1350	2.3389	88.0080	-2.3735
7	0.6800	-0.2462	-14.5285	-2.3485	94.0904	2.3638
8	0.6457	-0.3681	-9.8578	-2.3389	89.1974	2.3735
9	0.5969	-0.4885	-7.5763	-2.3251	86.6901	2.3873

$$\cos \theta_3 = \frac{(s_1 - Q)^2 + M^2 - a_{23}^2 - a_{34}^2}{2 \cdot a_{23} \cdot a_{34}}$$

Из уравнения (14) получаем

$$\theta_2 = \arcsin \frac{J \pm \sqrt{J^2 - 4 \cdot I \cdot K}}{2 \cdot I}, \quad (15)$$

что соответствует двум различным сборкам диады  $BCD$ .

### 3. Численные результаты

Пусть заданы длины звеньев  $a_{23} = a_{67} = a_{9,10} = 60, a_{34} = a_{74} = a_{10,4} = 70$ .

Заданы также параметры  $a_{OP}, \alpha_{OP}, b_{OP}, \beta_{OP}, c_{OP}, \gamma_{OP}$  (таблица 1), определяющие положение подвижной платформы 4 или координат центров сферических шарниров  $D, E, F$ .

Определены значения углов  $\theta_2, \theta_3, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{10}$ , из которых  $\theta_2, \theta_6, \theta_9$  являются входными при  $s_1 = s_5 = s_6 = 60$ . Результаты расчета представлены в таблице 2. Значения углов в таблицах 1 и 2 представлены в радианах.

Таблица 2

$i$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_9$	$\theta_{10}$
1	-0.9275	2.0794	-0.7799	2.4107	-0.7025	2.0794
2	-0.8859	2.0104	-0.7097	2.4016	-0.5619	2.0104
3	-0.8841	2.00801	-0.6606	2.4198	-0.6397	2.0080
4	-0.8822	2.1458	-0.9207	2.0194	-1.0482	2.1458
5	-0.8845	2.2002	-0.8610	1.9221	-1.1944	2.2002
6	-0.8757	2.2484	-0.7857	1.8197	-1.4824	2.2484
7	-0.9646	2.1482	-0.8922	2.2011	-0.4625	2.1482
8	-0.9276	2.0794	-0.9022	2.1849	-0.2645	2.0794
9	-0.8842	2.0080	-0.9234	2.1743	-0.0795	2.0080

### Выводы

Составлены матрицы кинематических пар и бинарных звеньев одной из трех идентичных ног параллельного манипулятора вида 3-PRRS. На основе составленных матриц кинематических пар и бинарных звеньев

решена обратная задача кинематики исследуемого параллельного манипулятора. Проведен численный анализ решения обратной задачи кинематики.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Merlet J-P. Parallel Robots. Kluwer, Dordrecht, 2000.
2. Tsai L.W. Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators. John Wiley & Sons, New York, 1999.
3. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Kluwer Academic Publisher, 2004.
4. Stewart D. A Platform with six Degrees-of-Freedom. Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 108, No. 15, 1965, pp.3771-386.
5. Kohli D., Lee S-H, Tsai K-Y, Sandor G. N., Manipulator Configurations Based on Rotary-Linear (R-L) Actuators and Their Direct and Inverse Kinematics. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 110, pp. 397-404, 1988.
6. Zlatanov D., Dai M.Q., Fenton R.G., Benhabib B., Mechanical Design and Kinematic Analysis of a Three-Legged Six Degree-of-Freedom Parallel Manipulator, Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems, Kiezal, Reinholtz, Lipkin, Tsai, Pennock, Cipra, eds., DE – Vol.45, pp. 529-536, 1992.
7. К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли. Робототехника. - М.: Изд.Мир, 1989.- 621 с.
8. Mark W.Spong, Seth Hutchinson and M.Vidyasagar. Robot Dynamics and Control. John Wiley & Sons, 2004.