УДК 510.67
МРНТИ 27.03.66

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-1-75-84

[1,2]**Судоплатов С.В.,**
д.ф.-м.н., профессор, ORCID ID: 0000-0002-3268-9389,
e-mail: sudoplat at math.nsc.ru
[3*]**Вербовский В.В.,**
д.ф.-м.н., доцент, ORCID ID: 0000-0001-5177-8523,
e-mail: verbovskiy at math.kz

[1]Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, Россия
[2]Новосибирский государственный технический университет, 630073, г. Новосибирск, Россия
[3]Институт математики и математического моделирования, 050010, г. Алматы, Казахстан

О ПОНЯТИЯХ ВЫПУКЛОСТИ И СЛАБОЙ О-МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУР

Аннотация

В данной работе мы рассматриваем обобщение понятия слабой о-минимальности на частично упорядоченные множества. Однако понятие слабой о-минимальности основано на понятии выпуклого множества, прямой перенос которого на частичные порядки, как будет показано в работе, не является, на наш взгляд, самым удачным, поскольку тогда в классе слабо о-минимальных частично упорядоченных структур возможно определить любую математическую структуру. Причем, как будет показано, это можно сделать при помощи такой простой операции, как пересечение интервалов. Статья посвящена поиску различных обобщений понятия выпуклого множества на частичные порядки. Так как выпуклые множества на прямой обладают и другими свойствами, такими, например, как возможность их представить в виде объединения или пересечения интервалов, выпуклые множества связны, все эти свойства могут быть положены в основу определения выпуклого множества для частично упорядоченных структур. Так, представление выпуклого множества в виде объединения вложенных друг в друга интервалов (полуинтервалов, отрезков) дает нам понятие внутренне выпуклого множества, а пересечение интервалов дает понятие внешне выпуклого множества. В статье будут построены примеры, которые показывают неэквивалентность вводимых понятий.

Ключевые слова: линейно упорядоченное множество, частично упорядоченное множество, слабая о-минимальность, выпуклое множество.

Введение

Понятие слабой о-минимальности основано на понятии выпуклого множества, или промежутка. Вспомним, что подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых элементов $a, b \in A$ и $c \in M$ неравенство $a < c < b$ влечет, что $c \in A$. Линейно упорядоченная структура называется *слабо о-минимальной*, если любое ее формульное подмножество есть конечное объединение выпуклых множеств [1].

Определение 1 (К.Ж. Кудайбергенов [3]). Частично упорядоченная структура $\mathcal{M}$ называется *слабо о-минимальной*, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением выпуклых множеств.

В работе К.Ж. Кудайбергенова [2] были рассмотрены другие варианты определения слабой о-минимальности, которые представляют интерес, но выходят за рамки обсуждаемой здесь темы, поэтому мы их касаться не будем. Кроме того, следует отметить работы [4–5].

При переходе от линейных порядков к частичным прямолинейный перенос понятия выпуклого множества несет в себе такие неудобства, что любая антицепь является выпуклым множеством, а это делает класс слабо о-минимальных частично упорядоченных структур чрезмерно большим для исследования. Действительно, имеет место следующий очевидный факт.

Предложение 2. *Пусть* $\mathcal{M} = (M, \Sigma)$ *– произвольная структура сигнатуры* Σ, *которая не содержит символ* $\preceq$. *Тогда обогащение* $\mathcal{M}^+ = (M, \Sigma \cup \{\preceq\})$ *структуры* $\mathcal{M}$ *отношением* $\preceq$, *которое проинтерпретировано так, что совпадает с равенством:* $x \preceq y \Leftrightarrow x = y$, *является слабо о-минимальным относительно частичного порядка* $\preceq$.

Заметим, что если в структуре есть несколько частичных порядков, то относительно одного порядка структура может быть слабо о-минимальной, а относительно другого – нет. Например, $(\mathbb{R}, \leq, \preceq, Q)$, где $\leq$ – это естественный порядок на вещественных числах, $\preceq$ совпадает с равенством, а одноместный предикат Q выделяет подмножество рациональных чисел. Очевидно, что относительно естественного порядка данная структура не является слабо о-минимальной, а относительно $\preceq$ является.

Мы предлагаем некоторые варианты обобщения понятия выпуклого множества на частичные порядки. Иначе говоря, статья посвящена способам определения понятия выпуклого множества на частичных порядках. Как будет видно, эта задача оказалась достаточно трудной, нет единственного способа задать такое определение. Вполне допустимо, что можно исследовать слабо о-минимальные структуры на основе каждого из предложенных ниже определений выпуклого множества. Кроме того, поскольку на линейном порядке все эти понятия эквивалентны, представляет интерес описание частичных порядков, где те или иные понятия, вводимые ниже, совпадают.

Основные положения

Определение 3. В частично упорядоченной структуре $\mathcal{M}$ с частичным порядком $<$ множество A называется *l-выпуклым*, если A выпукло и состоит из сравнимых элементов. Структура $\mathcal{M}$ называется *l-слабо о-минимальной*, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением l-выпуклых множеств.

По определению любая слабо о-минимальная линейно упорядоченная структура является l-слабо о-минимальной. Также l-слабо о-минимальной является дизъюнктное объединение любого конечного числа слабо о-минимальных линейно упорядоченных структур. При этом l-слабая о-минимальность нарушается при взятии дизъюнктного объединения любого бесконечного числа линейно упорядоченных структур. Более того, не является l-слабо о-минимальной любая частично упорядоченная структура с бесконечной антицепью.

Таким образом, морлизация любой l-слабо о-минимальной структуры представляется в виде объединения конечного числа слабо о-минимальных линейно упорядоченных структур. В частности, справедливо следующее:

Предложение 4. *Дизъюнктное объединение слабо о-минимальных линейно упорядоченных структур* $\mathcal{M}_i$, $i \in I$, *l-слабо о-минимально тогда и только тогда, когда множество* I *конечно.*

Определение 5. Частично упорядоченная структура $\mathcal{M}$ удовлетворяет *условию сравнимости*, если любое ее бесконечное формульное подмножество содержит сравнимые элементы.

Предложение 6. *Для любой частично упорядоченной структуры* $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию сравнимости;

(2) любое бесконечное формульное подмножество в $\mathcal{M}$ содержит бесконечную цепь.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть подмножество A формульно. Предположим, что любая цепь в множестве A конечна. Тогда любая цепь в A содержит минимальный элемент. Поскольку множество $A_{\min}$ минимальных в A элементов формульно, а минимальные элементы попарно несравнимы, то $A_{\min}$ конечно. Пусть $A_{\min} = \{a_1, \dots, a_n\}$, а $A_i = \{a \in A : a > a_i\}$. Очевидно, что объединение всех множеств A_i дает A, иначе существовал бы элемент, под которым нет минимального, но в этом случае мы получили бы бесконечную убывающую цепь. Следовательно, хотя бы одно из множеств A_i бесконечно, скажем, A_{i_1}. Повторим наши рассуждения, заменив множество A на A_{i_1}. Предположим, что множество $A_{i_1,\dots,i_k}$ построено и бесконечно. Поскольку мно-

жество $(A_{i_1,\dots,i_k})_{\min}$ минимальных в $A_{i_1,\dots,i_k}$ элементов формульно, а минимальные элементы попарно несравнимы, то $(A_{i_1,\dots,i_k})_{\min}$ конечно. Пусть $(A_{i_1,\dots,i_k})_{\min} = \{a_{i_1,\dots,i_k,1}, \dots, a_{i_1,\dots,i_k,n_{k+1}}\}$, а $A_{i_1,\dots,i_k,i} = \{a \in A_{i_1,\dots,i_k} : a > a_{i_1,\dots,i_k,i}\}$. Очевидно, что объединение всех множеств $A_{i_1,\dots,i_k,i}$ дает $A_{i_1,\dots,i_k}$, следовательно, хотя бы одно из множеств $A_{i_1,\dots,i_k,i}$ бесконечно, скажем, $A_{i_1,\dots,i_k,i_{k+1}}$. В итоге мы получаем бесконечную цепь

$$a_{i_1} < a_{i_1,i_2} < \dots < a_{i_1,i_2,\dots,i_k} < \cdots,$$

что и требовалось доказать.

Пусть частично упорядоченная структура $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ удовлетворяет условию сравнимости, а бесконечное множество $A \subseteq M$ формульно. Как мы знаем из предложения 6, множество A содержит бесконечную цепь. Предположим, что $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, а порядок задан следующим образом: имеет место $(n_1, q_1) < (n_2, q_2)$ тогда и только тогда, когда $n_1 = n_2$ и $q_1 < q_2$. Тогда множество A выпукло. Несложно доказать, что разбиение множества A на множества $\{n\} \times \mathbb{Q}$ равномерно определимо, поэтому отношение эквивалентности E на множестве A, чьи классы в точности $\{n\} \times \mathbb{Q}$, формульно. Теперь на фактор-множестве A/E, которое образует антицепь, можно определить любую структуру, и эта структура, как не сложно понять, будет слабо о-минимальной. Получается, что условия сравнимости недостаточно, чтобы класс слабо о-минимальных частично упорядоченных структур не был чересчур богатым.

Определение 7. Частично упорядоченная структура $\mathcal{M}$ удовлетворяет *условию сравнимости для воображаемых элементов*, если для любого отношения эквивалентности E, такого что отношение на E-классах, заданное формулой $[a]_E \prec [b_E]$, если $a < b$, не зависит от выбора представителя класса эквивалентности и задает частичный порядок, сорт, порождаемый отношением эквивалентности E с порядком $\prec$, удовлетворяет условию сравнимости.

Будем считать, что интервал (c, d) вложен в интервал (a, b), если $a \le c \le d \le b$.

Определение 8. Подмножество A частично упорядоченного множества M называется

1. $\cup$-*выпуклым*, или *внутренне выпуклым*, если оно является одноэлементным или объединением вложенных друг в друга отрезков, интервалов или полуинтервалов;
2. $\cap$-*выпуклым*, или *внешне выпуклым*, если оно является одноэлементным или пересечением вложенных друг в друга отрезков, интервалов или полуинтервалов;
3. *Двусторонне выпуклым*, если оно является и $\cup$-выпуклым, и $\cap$-выпуклым; и
4. *Односторонне выпуклым*, если оно является $\cup$-выпуклым или $\cap$-выпуклым.

Можно ввести и более сложную классификацию выпуклых множеств.

Определение 9. Подмножество A частично упорядоченного множества M называется

0. Σ_0-*выпуклым*, или Π_0-*выпуклым*, или Δ_0-*выпуклым*, если оно является отрезком, интервалом или полуинтервалом;

1.

(a) Σ_1-*выпуклым*, или *внутренне выпуклым*, если оно является одноэлементным или объединением вложенных друг в друга отрезков, интервалов или полуинтервалов;

(b) Π_1-*выпуклым*, или *внешне выпуклым*, если оно является одноэлементным или пересечением вложенных друг в друга отрезков, интервалов или полуинтервалов;

(c) Δ_1-*выпуклым*, или *двусторонне выпуклым*, если оно является и Σ_1-выпуклым, и Π_1-выпуклым; и

(d) ∇_1-*выпуклым*, или *односторонне выпуклым*, если оно является Σ_1-выпуклым или Π_1-выпуклым.

$n+1$.

(a) Σ_{n+1}-*выпуклым*, если оно является Σ_n-выпуклым или объединением вложенных друг в друга Π_n-выпуклых множеств;

(b) Π_{n+1}-*выпуклым*, если оно является Π_n-выпуклым или пересечением вложенных друг в друга Σ_n-выпуклых множеств;

(c) Δ_{n+1}-*выпуклым*, если оно является и Σ_{n+1}-выпуклым, и Π_{n+1}-выпуклым; и

(d) ∇_{n+1}-*выпуклым*, если оно является Σ_{n+1}-выпуклым или Π_{n+1}-выпуклым.

Заметим, что в линейно упорядоченных структурах понятия односторонней и двусторонней выпуклостей совпадают. Было бы интересно описать все частично упорядоченные множества, в которых имеет место такое совпадение.

Рассмотрим решетку всех замкнутых подмножеств множества $\mathbb{R}$ в топологии, индуцированной естественным порядком, с отношением частичного порядка, заданного как «быть подмножеством». Каждое замкнутое множество A можно представить в виде отрезка $[\emptyset, A]$. Тогда бесконечное объединение замкнутых вложенных друг в друга множеств дает нам Σ_1-выпуклое множество. А бесконечное пересечение Σ_1-выпуклых множеств дает Π_2-выпуклое множество. Далее можно перенести классификацию борелевских множеств на определение *-выпуклости. Как известно, классы борелевских множеств никогда не стабилизируются, поэтому, например, класс Π_2-выпуклых множеств не совпадает с классом Σ_1-выпуклых множеств.

Определение 10. Частично упорядоченная структура M называется **-слабо о-минимальной*, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением *-выпуклых множеств, где $* \in \{\cup, \cap$, односторонне, двусторонне$\}$.

Определение 11. Частично упорядоченная структура M называется **-слабо булево о-минимальной*, или **-слабо б-о-минимальной*, если любое ее формульное подмножество является булевой комбинацией *-выпуклых множеств, где $* \in \{\cup, \cap$, односторонне, двусторонне$\}$.

В линейных порядках непустое пересечение двух интервалов само является интервалом. Верно это и в решетках. В общем же случае, пересекая два интервала, можно получить и бесконечную антицепь, чего мы хотим избежать. Действительно, рассмотрим структуру

$$\mathcal{M} = (M, <) = (Q \times Q \cup \{-\infty, +\infty\}, <),$$

где $(a, b) < (c, d)$, если $a < b$ и $c < d$ в классическом смысле, элемент $-\infty$ наименьший, а элемент $+\infty$ наибольший. Заметим, что таким образом заданный порядок на $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ называется порядком Парето. Выберем в этой структуре произвольную бесконечную антицепь, например, $A = \{(q, -q) : q \in \mathbb{Q}\}$. Построим теперь новую структуру следующим образом. Для множеств

$$A^- = \{b \in M : \exists a \in A (b < a)\}, A^+ = \{b \in M : \exists a \in A (b > a)\}$$

создадим их непересекающиеся с ними копии $\tilde{A}^-$ и $\tilde{A}^+$ (при помощи биекций π^- и π^+ соответственно). Пусть $\widetilde{M} = A^- \cup A \cup A^+ \cup \tilde{A}^- \cup \tilde{A}^+$, на множестве $A^- \cup A \cup A^+$ порядок старый. Определим биекцию π из $A^- \cup A \cup A^+$ в $\tilde{A}^- \cup A \cup \tilde{A}^+$ как объединение π^-, id и π^+. Тогда частичный порядок на множестве $\tilde{A}^+ \cup A \cup \tilde{A}^-$ индуцирован порядком на $A^- \cup A \cup A^+$ при помощи биекции π. Для завершения процедуры определения частичного порядка на $\widetilde{M}$ осталось только взять транзитивное замыкание построенного выше отношения. Так как $-\infty \in A^-$ и $+\infty \in A^+$, то соответствующие им элементы в множествах $\tilde{A}^-$ и $\tilde{A}^+$ обозначим $-\tilde{\infty}$ и $+\tilde{\infty}$ соответственно. Тогда $(-\infty, +\infty) \cap (-\tilde{\infty}, +\tilde{\infty}) = A$, то есть пересечение данных интервалов дает бесконечную антицепь.

Заметим, что данную конструкцию можно модифицировать. Выберем произвольное подмножество $B \subseteq A$. Для него можно проделать все то же самое, что и для A, добавим к структуре $\widetilde{\mathcal{M}}$ еще множества $\hat{A}^-$ и $\hat{A}^+$, построенные аналогично $\tilde{A}^-$ и $\tilde{A}^+$, только с целью, чтобы пересечение $(-\infty, +\infty) \cap (-\hat{\infty}, +\hat{\infty})$ давало бы B. Понятно, что, продолжая расширять структуру $\widetilde{\mathcal{M}}$, можно получить такую структуру, где пересечение интервалов дает любое наперед заданное подмножество множества A. Поскольку декартово произведение частично упорядоченных множеств само является частично упорядоченным, можно построить и такое расширение структуры $\mathcal{M}$, где пересечение интервалов давало бы любое наперед заданное подмножество некоторой декартовой степени множества A. Получаем, что любую структуру можно определить в некоторой частично упорядоченной структуре только при помощи пересечения интервалов. Ясно, что изучение такого богатого класса непродуктивно, изучению более «ручных» подклассов и посвящена данная работа.

В линейных порядках пересечение выпуклых множеств выпукло (или пусто, но пустое множество мы считаем выпуклым). Рассмотрим пересечение двух $\cup$-выпуклых множеств $A = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$ и $C = \bigcup_{j\in J}(c_j, d_j)$. Поскольку в представлении $\bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$ интервалы могут повторяться, можно считать, что множества индексов I и J равномощны, поэтому впредь мы будем опускать их и писать просто $\bigcup_i(a_i, b_i)$. Предположим, что $A \cap C \neq \emptyset$, то есть

$$\left(\bigcup_i (a_i, b_i)\right) \cap \left(\bigcup_i (c_i, d_i)\right) \neq \emptyset$$

Тогда для некоторых i и j пересечение $(a_i, b_i) \cap (c_j, d_j) \neq \emptyset$. Поскольку мы рассматриваем возрастающие системы интервалов, то $(a_k, b_k) \cap (c_k, d_k) \neq \emptyset$, где $k = \max(i, j)$. Кроме того, так как $\bigcup_{i\le\alpha}(a_i, b_i) = (a_\alpha, b_\alpha)$, мы можем $A \cap C$ представить как

$$\bigcup_i ((a_i, b_i) \cap (c_i, d_i)),$$

причем, не умаляя общности, считать, что все пересечения $(a_i, b_i) \cap (c_i, d_i)$ не являются пустыми.

Рассмотрим пример. Пусть M будет объединением непересекающихся копий $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$, а отношение порядка в структуре $\mathcal{M} = (M, <)$ задано следующим образом. На копии $\mathbb{Q}$ имеем естественный порядок, на $\mathbb{N}$ порядок тривиальный, то есть никакие два элемента не являются сравнимыми, и каждый элемент из $\mathbb{Q}$ меньше каждого элемента из $\mathbb{N}$. Рассмотрим обогащение $\mathcal{M}_P$ структуры $\mathcal{M}$ одноместным предикатом R, который выделяет $\mathbb{N}$. Это множество является $\cap$-выпуклым. Очевидно, что $R(\mathcal{M})\backslash\{a\}$, где $a \in \mathbb{N}$, является формульным, но не является $*$-выпуклым для всех вариантов значения $*$. Поэтому структура $\mathcal{M}_R$ не является $*$-слабо о-минимальной. Тем не менее при помощи элиминации кванторов нетрудно доказать, что $\mathcal{M}_R$ является $\cap$-слабо б-о-минимальной. Заметим, что предикат R формулен и в исходном языке, для этого можно взять дополнение интервала $(-\infty, a)$, где $a \in \mathbb{N}$.

Проведем теперь анализ $\cup$- и $\cap$-слабой о-минимальности. Предположим, что множество A является $\cup$-выпуклым, то есть $A = \bigcup_i(a_i, b_i)$. Рассмотрим дополнение $\overline{A}$ множества A. В силу $\cup$-слабой о-минимальности оно является конечным объединением $\cup$-выпуклых множеств C_1, …, C_n, где $C_k = \bigcup_i(c_i^k, d_i^k)$. Тогда

$$\overline{A} = \overline{\bigcup_i (a_i, b_i)} = \bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_i (c_i^k, d_i^k)$$

Отсюда получаем, что

$$A = \bigcap_{k=1}^{n}\bigcap_i \overline{(c_i^k, d_i^k)}$$

Заметим, что в частичных порядках $\neg(x < a)$ эквивалентно дизъюнкции формул $x \ge a$ и $x \parallel a$, где $x \parallel a$ говорит, что элементы x и a несравнимы. Тогда

$$\neg(c < x < d) \Leftrightarrow \neg(c < x) \vee \neg(x < d) \Leftrightarrow x \ge c \vee x \parallel c \vee d \le x \vee x \parallel d$$

Формулу $x \parallel y$ мы будем обозначать также $P(x, y)$, тогда множество всех решений формулы $x \parallel a$ в структуре $\mathcal{M}$ можно будет обозначить как $P(\mathcal{M}, a)$ (это удобнее обозначения $(x \parallel a)^{\mathcal{M}}$). Получаем, что дополнение $\overline{(c, d)}$ интервала (c, d) равно

$$(-\infty, c] \cup [d, +\infty) \cup P(\mathcal{M}, c) \cup P(\mathcal{M}, d)$$

Очевидно, что пары множеств $(-\infty, c]$ и $[d, +\infty)$, $(-\infty, c]$ и $P(\mathcal{M}, c)$, $[d, +\infty)$ и $P(\mathcal{M}, d)$ не пересекаются. Если элемент лежит в $(-\infty, c]$, то в силу транзитивности он меньше элемента d, поэтому не лежит в $P(\mathcal{M}, d)$, следовательно, множества $(-\infty, c]$ и $P(\mathcal{M}, d)$ не пересекаются. По аналогичным причинам не пересекаются множества $[d, +\infty)$ и $P(\mathcal{M}, c)$. Отсюда следует, что множества $(-\infty, c]$, $[d, +\infty)$ и $P(\mathcal{M}, c) \cup P(\mathcal{M}, d)$ попарно не пересекаются.

Теперь множество A можно представить в следующем виде:

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_i \overline{(c_i^k, d_i^k)} =$$
$$= \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_i ((-\infty, c_i^k] \cup [d_i^k, +\infty) \cup (P(\mathcal{M}, c_i^k) \cup P(\mathcal{M}, d_i^k))) =$$
$$= \bigcap_{k=1}^{n} ((\bigcap_i (-\infty, c_i^k]) \cup (\bigcap_i [d_i^k, +\infty)) \cup (\bigcap_i (P(\mathcal{M}, c_i^k) \cup P(\mathcal{M}, d_i^k))))$$
$$= (\bigcap_i \bigcap_{k=1}^{n} (-\infty, c_i^k]) \cup (\bigcap_i \bigcap_{k=1}^{n} [d_i^k, +\infty)) \cup (\bigcap_i \bigcap_{k=1}^{n} (P(\mathcal{M}, c_i^k) \cup P(\mathcal{M}, d_i^k))).$$

Отсюда получаем следующую лемму.

Лемма 12. *Если структура $\mathcal{M}$ является $\cup$-слабо о-минимальной и любое конечное пересечение интервалов в $\mathcal{M}$ с одним концом в бесконечности является интервалом, а множества вида $\bigcap_i \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{m=1}^{p} P(\mathcal{M}, c_{km}^i)$ являются конечными объединениями $\cap$-выпуклых множеств, то $\mathcal{M}$ является и $\cap$-слабо о-минимальной.*

Проделаем аналогичные рассуждения для $\cap$-слабой о-минимальности. Предположим, что множество A является $\cap$-выпуклым, то есть $A = \bigcap_i (a_i, b_i)$. Рассмотрим дополнение $\overline{A}$ множества A. В силу $\cap$-слабой о-минимальности оно является конечным объединением $\cap$-выпуклых множеств $C_1, \ldots, C_n$, где $C_k = \bigcap_i (c_i^k, d_i^k)$. Тогда

$$\overline{A} = \overline{\bigcap_i (a_i, b_i)} = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_i (c_i^k, d_i^k).$$

Отсюда получаем, что

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_i \overline{(c_i^k, d_i^k)}.$$

Теперь множество A можно представить следующим образом:

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_i \overline{(c_i^k, d_i^k)} =$$
$$= \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_i ((-\infty, c_i^k] \cup [d_i^k, +\infty) \cup (P(\mathcal{M}, c_i^k) \cup P(\mathcal{M}, d_i^k))) =$$
$$= \bigcap_{k=1}^{n} ((\bigcup_i (-\infty, c_i^k]) \cup (\bigcup_i [d_i^k, +\infty)) \cup (\bigcup_i (P(\mathcal{M}, c_i^k) \cup P(\mathcal{M}, d_i^k))))$$
$$= (\bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_i (-\infty, c_i^k]) \cup (\bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_i [d_i^k, +\infty)) \cup (\bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_i (P(\mathcal{M}, c_i^k) \cup P(\mathcal{M}, d_i^k))).$$

Лемма 13. *Если структура $\mathcal{M}$ является $\cap$-слабо о-минимальной и любое конечное пересечение $\cup$-выпуклых множеств является конечным объединением $\cup$-выпуклых множеств, а множества вида $\bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_i P(\mathcal{M}, c_i)$ являются конечными объединениями $\cup$-выпуклых множеств, то $\mathcal{M}$ является и $\cup$-слабо о-минимальной.*

Учитывая леммы 12 и 13, справедлива:

Теорема 14. *Понятия $\cup$-выпуклых и $\cap$-выпуклых множеств независимы. Классы $\cap$-слабо о-минимальных и $\cup$-слабо о-минимальных структур являются собственными подклассами класса односторонне слабо о-минимальных структур, который, в свою очередь, является собственным подклассом класса слабо о-минимальных структур.*

Определение 15. Частично упорядоченную $*$-слабо о-минимальную структуру $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ будем называть $(*)$-слабо о-минимальной, если любое ее бесконечное формульное выпуклое подмножество содержит некоторый бесконечный интервал.

По определению любая слабо о-минимальная структура является $(*)$-слабо о-минимальной.

Определение 16. В частично упорядоченной структуре *$*$-выпуклой компонентой* множества A назовем его наибольшее $*$-выпуклое подмножество.

Максимальное выпуклое подмножество множества A называется *$*$-выпуклой квазикомпонентой* множества A.

Подмножество A частично упорядоченного множества называется *связным*, если оно является слабо-связным в смысле теории графов, то есть если для любых элементов a и $b \in A$ существует последовательность $a = c_0, c_1, \dots, c_n = b$ элементов из A, такая, что два соседних элемента последовательности сравнимы.

Семейство интервалов $\mathcal{J} = \{I_j : j \in J\}$ называется *связным*, если для любых двух его интервалов I и I' существует конечная последовательность его интервалов $I_{j_0}, \dots, I_{j_n}$, начинающаяся с I и заканчивающаяся на I', такие, что любые два соседних в последовательности интервала имеют непустое пересечение.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 17. *Внутренне выпуклое множество является связным и выпуклым.*

Лемма 18. *Пусть $\mathcal{M} = (M, \leq)$ является частично упорядоченной структурой и $A \subseteq M$ выпукло (в классическом понимании, то есть $[a, b] \subseteq A$ для любых a, $b \in A$, если $a < b$). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество A является связным*;

(2) *множество A является объединением отрезков из некоторого связного семейства отрезков*.

Доказательство. Если множество A одноэлементно, то лемма очевидна: одноэлементное множество связно, а в качестве семейства мы возьмем одноэлементное семейство $\{[a, a]\}$ отрезков, где элемент a такой, что $A = \{a\}$. Так что мы будем рассматривать только неодноэлементные множества.

Докажем импликацию $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть a и $b \in A$ – разные элементы. Тогда существует последовательность $a = c_0, c_1, \dots, c_n = b$ элементов из A, такая, что два соседних элемента последовательности сравнимы. В силу выпуклости множества A получаем, что $[c_i, c_{i+1}] \subseteq A$. В качестве семейства возьмем все отрезки вида $[c_i, c_{i+1}]$, которые получаются из последовательностей, выбираемых для произвольных элементов a и $b \in A$. Докажем, что это семейство связно. Рассмотрим два произвольных отрезка $[c_i, c_{i+1}]$ и $[c_{j'}, {c_{j+1}}']$. Пары элементов c_i, c_{i+1} и $c_{j'}$, ${c_{j+1}}'$ лежат, соответственно, в последовательностях, соединяющих некоторые пары элементов a, b и a', b'. Построим еще последовательность элементов, соединяющую b и a', а затем соответствующую последовательность отрезков. Рассмотрим конкатенацию последовательностей отрезков, порожденных парой a, b, парой b и a' и парой a', b'. Легко понять, что в этой последовательности отрезков пересечение соседних отрезков непусто.

Докажем обратную импликацию $(2) \Rightarrow (1)$. Пусть множество A является объединением отрезков из связного семейства интервалов $\mathcal{J}$. Пусть a и $b \in A$, а последовательность $a = c_0$, $c_1, \dots, c_n = b$ элементов из A такая, что два соседних элемента последовательности сравнимы. Поскольку A является объединением отрезков, то каждый элемент c_i лежит в некотором отрезке $I_i \in \mathcal{J}$. Так как семейство $\mathcal{J}$ связно, то для каждой пары отрезков I_i, I_{i+1} существует последовательность отрезков $I_{i,0} = I_i, I_{i,1}, \dots, I_{i,k_i} = I_{i+1}$, так что любые два соседних отрезка имеют непустое пересечение. Элемент из непустого пересечения $I_{i,j} \cap I_{i,j+1}$ мы обозначим $d_{i,j}$, начало отрезка $I_{i,j}$ обозначим $b_{i,j}$. Тогда конкатенация последовательностей

$$\langle a = c_0, b_{0,0}, d_{0,0}, b_{0,1}, d_{0,1}, \dots, d_{0,k_0-1}, b_{0,k_0} \rangle,$$

$$\langle c_1, b_{1,0}, d_{1,0}, b_{1,1}, d_{1,1}, \dots, d_{1,k_0-1}, b_{1,k_1} \rangle,$$

$$\dots$$

$$\langle c_{n-1}, b_{n-1,0}, d_{n-1,0}, b_{n-1,1}, d_{n-1,1}, \dots, d_{n-1,k_{n-1}-1}, b_{n-1,k_{n-1}}, c_n = b \rangle$$

и есть искомая.

Предложение 19. *Существует частично упорядоченная структура, в которой внешне выпуклое множество не является связным и, следовательно, внутренне выпуклым.*

Доказательство. Пусть $M = \{-\infty\} \times \mathbb{Q} \cup \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{Q}$. Теперь в структуре $\mathcal{M} = (M, \leq)$ зададим частичный порядок следующим образом. На каждой копии $\mathbb{Q}$ порядок естественный. Каждый элемент из $\{-\infty\} \times \mathbb{Q}$ меньше любого элемента из $\{a\} \times \mathbb{Q}$, в том случае, когда $a \neq -\infty$. Каждый элемент из $\{+\infty\} \times \mathbb{Q}$ больше любого элемента из $\{a\} \times \mathbb{Q}$, где $a \neq +\infty$. Если $n \neq k$ – элементы из $\mathbb{N}$, то никакие элементы из $\{n\} \times \mathbb{Q}$ и $\{k\} \times \mathbb{Q}$ не являются сравнимыми.

Очевидно, что $\mathbb{N} \times \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} ((-\infty, q), (+\infty, -q))$ является внешне выпуклым. Тем не менее, это множество не является связным.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 22. *$\cup$-слабо о-минимальная структура является $(\cup)$-слабо о-минимальной.*

Предложение 23. *Пусть частично упорядоченная структура $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ с плотным порядком является $(*)$-слабо о-минимальной. Тогда не существует бесконечного формульного подмножества, у которого любые два элемента несравнимы.*

Доказательство. Предположим противное, что существует бесконечное формульное подмножество A, такое, что любые его два элемента несравнимы. В силу $(*)$-слабой о-минимальности множество A состоит из конечного числа выпуклых множеств, причем одно из них бесконечно. Поскольку это множество формульно, оно содержит интервал (a, b). Но тогда $a < b$, что противоречит выбору множества A.

Материалы и методы

Основные материалы в проведенной работе – это частично упорядоченные алгебраические структуры и их подмножества, которые можно было бы в том или ином смысле считать выпуклыми. Методы, которые применялись в исследовании, – это общие методы теории моделей, методы о-минимальности и слабой о-минимальности для линейно упорядоченных структур в их адаптации к исследованию частично упорядоченных структур.

Результаты и обсуждение

Результатом проведенного исследования является ряд обобщений понятия выпуклого множества на частично упорядоченные структуры и некоторые свойства $*$-слабо о-минимальных структур. Мы были бы рады, если бы читатели присоединились к обсуждению вариантов слабой о-минимальности для частично упорядоченных структур, перед нами стоит множество вопросов, в частности, описания насколько эти классы совпадают, описания чистых частичных порядков, где все или некоторые понятия $*$-слабой о-минимальности эквивалентны, описание свойств одноместных функций, взаимодействия типов и многие другие.

Заключение

В работе получены результаты, которые говорят, что перенос слабой о-минимальности на частичные порядки не является тривиальной задачей, были получены разнообразные классы слабо о-минимальных частично упорядоченных структур, для каждого из которых можно развивать свою теорию.

Информация о финансировании

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант BR20281002), а также в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2022-0012.

ЛИТЕРАТУРА

1 Macpherson H.D., Marker D. and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 352. – No. 12. – P. 5435–5483.

2 Кудайбергенов К.Ж. Отношения выпуклости и обобщения о-минимальности // Математические труды. – 2018. – Т. 21. – № 1. – С. 35–54.

3 Кудайбергенов К.Ж. Обобщение о-минимальности на частичные порядки // Математические труды. – 2012. – Т. 15. – № 1. – С. 86–108.

4 Kulpeshov B.Sh. On connectedness in partially ordered structures // AIP Proceedings 1759, 020062 (2016), https://doi.org/ 10.1063/1.4969676.

5 Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of binary formulas for some partially ordered theories // Algebra and Model Theory 13 (collection of papers edited by A.G. Pinus, E.N. Poroshenko, and S.V. Sudoplatov). – NSTU, Novosibirsk, 2021. – P. 69–75.

REFERENCES

1 Macpherson H.D., Marker D. and Steinhorn C. (2000) Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 352, no. 12, pp. 5435–5483.

2 Kudaĭbergenov K. Zh. (2019) Convexity relations and generalizations of o-minimality. Siberian Adv. Math., vol. 29, no 1, pp. 44–56 [in Russian].

3 Kudaibergenov K. Zh. (2013) Generalized o-minimality for partial orders. Siberian Adv. Math., vol. 23, no 1, pp. 47–60 [in Russian].

4 Kulpeshov B. Sh. (2016) On connectedness in partially ordered structures. AIP Proceedings 1759, 020062, https://doi.org/10.1063/1.4969676.

5 Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. (2021) Algebras of binary formulas for some partially ordered theories. Algebra and Model Theory 13 (collection of papers edited by A. G. Pinus, E.N. Poroshenko, and S.V. Sudoplatov), NSTU, Novosibirsk, pp. 69–75.

[1,2]**Судоплатов С.В.,**
ф.-м.ғ.д., профессор, ORCID ID: 0000-0002-3268-9389,
e-mail: sudoplat at math.nsc.ru
[3*]**Вербовский В.В.,**
ф.-м.ғ.д., доцент, ORCID ID 0000-0001-5177-8523,
e-mail: verbovskiy at math.kz

[1] РҒА СБ С.Л. Соболев атындағы математика институты, 630090, Новосибирск қ., Ресей
[2] Новосібір мемлекетік техникалық университеті, 630073, Новосибирск қ., Ресей
[3]Математика және математикалық модельдеу институты, 050010, Алматы қ., Қазақстан

ЖАРТЫЛАЙ РЕТТЕЛГЕН ҚҰРЫЛЫМДАР ҮШІН ДӨҢЕСТІК ЖӘНЕ ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫЛЫҚ ТҮСІНІКТЕРІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Бұл жұмыста біз әлсіз о-минималдылық концепциясын жартылай реттелген жиындарға жалпылауды қарастырамыз. Дегенмен әлсіз о-минималдылық концепциясы дөңес жиын тұжырымдамасына біздің ойымызша негізделген, яғни осы жұмыста ұсынылған ішінара тікелей тасымалдау, ең сәтті шешім емес. Себебі ендеше әлсіз о-минималды жартылай реттелген құрылымдар класында кез келген математикалық құрылымды анықтауға болады. Оның үстіне, көрсетілгендей, мұны интервалдардың қиылысуы сияқты қарапайым операция арқылы жүзеге асырады. Мақала ішінара реттерге «дөңес жиын» түсінігінің әртүрлі жалпылауларын іздеуге арналған. Түзудегі дөңес жиындардың басқа да қасиеттері бар, мысалы, оларды интервалдардың бірігуі немесе қиылысы ретінде көрсету мүмкіндігі. Дөңес жиындар өзара байланысты болғандықтан, бұл қасиеттердің барлығы ішінара реттелген құрылымдар үшін дөңес жиынды анықтауға негіз бола алады. Осылайша, дөңес жиынды кірістірілген аралықтардың (жартылай интервалдар, сегменттер) бірігуі ретінде көрсету бізге «ішкі дөңес жиын» түсінігін, ал аралықтардың қиылысуы «сыртқы дөңес жиын» ұғымын береді. Мақалада енгізілген ұғымдардың эквиваленттсіздігін көрсететін мысалдар құрастырылды.

Тірек сөздер: сызықтық реттелген жиын, жартылай реттелген жиын, әлсіз о-минималдылық, дөңес жиын.

[1,2]**Sudoplatov S.V.,**
Dr. Phys.-Math.Sc., Professor, ORCID ID: 0000-0002-3268-9389,
e-mail: sudoplat at math.nsc.ru
[3*]**Verbovskiy V.V.,**
Dr. Phys.-Math.Sc., ORCID ID: 0000-0001-5177-8523,
e-mail: verbovskiy at math.kz

[1]S.L. Sobolev Institute of Mathematics, 630090, Novosibirsk, Russia
[2]Novosibirsk State Technical University, 630073, Novosibirsk, Russia
[3]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan

ON THE CONCEPTS OF CONVEXITY AND WEAK O-MINIMALITY FOR PARTIALLY ORDERED STRUCTURES

Abstract

In this paper, we consider a generalization of the concept of weak o-minimality to partially ordered sets. However, the concept of weak o-minimality is based on the concept of a convex set, the direct transfer of which to partial orders, as it will be shown in the work, is not, in our opinion, the most successful, since then in the class of weakly o-minimal partially ordered structures, it is possible to define any mathematical structure. Moreover, as it will be shown, this can be done using such a simple operation as the intersection of intervals. The article is devoted to the search for various generalizations of the concept of "convex set" to partial orders. Since convex sets on a line also have other properties, such as the ability to represent them as a union or intersection of intervals, convex sets are connected, all these properties can be used as the basis for the definition of a "convex set" for partially ordered structures. Thus, the representation of a convex set as a union of nested intervals (half-intervals, segments) gives us the concept of an "internally convex set," and the intersection of intervals gives us the concept of an "externally convex set". In the article, we will build examples that show the non-equivalence of the introduced concepts.

Key words: linearly ordered set, partially ordered set, weak o-minimality, convex set.