ӘОЖ 517.927.2
ҒТАХР 27.41.19, 27.29.19

https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-1-64-74

[1,2]**Бакирова Э.А.,**
ф-м.ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-3820-5373, e-mail: bakirova1974@mail.ru
[1]**Искакова Н.Б.,**
ф-м.ғ.к., ORCID ID: 0000-0002-0680-4099, e-mail: narkesh@mail.ru
[1,3]**Темешева С.М.,**
ф-м.ғ.д., ORCID ID: 0000-0002-3341-4539, e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com
[1,4]***Кадирбаева Ж.М.,**
ф-м.ғ.к., ORCID ID: 0000-0001-8861-4100, e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

[1]Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
[2]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[3]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[4]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы қ., Қазақстан

ПАРАМЕТРІ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Ақырлы интервалда параметрлеу әдісі негізінде параметрі бар дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық шеттік есеп зерттеледі. Интервалды бөлу, бөлу нүктелерінде қосымша параметрлерді және жаңа функцияларды енгізу арқылы зерттелді. Параметрі бар шеттік есеп эквиваленттi параметрлері бар көп нүктелі шеттік есепке келтірілді. Алынған эквивалентті шеттік есеп жаңа функцияларға қатысты жай дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есептерін қамтиды. Коши есебінің шешімінің кейіптемесін шешімнің үзіліссіздік шарттары мен шеттік шарттарына қою арқылы енгізілген параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі құрастырылды. Параметрлері бар шеттік есептің шешімін табу алгоритмі құрастырылды. Параметрлері бар шеттік есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары туралы теореманың тұжырымы ұсынылды. Бастапқы шеттік есептің бастапқы берілімдер терминінде оның бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары алынды. Теоремалардың шарттарының орындалуын көрсететін мысал келтірілді.

Тірек сөздер: параметрі бар дифференциалдық теңдеу, шеттік есеп, шешілімділік, параметрлеу әдісі.

Ұсынылып отырған жұмыста параметрі бар дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{A}(t)z + \mathcal{A}_0(t)\mu + f(t), \qquad t \in (0,T), \qquad z \in \mathbb{R}^n, \qquad \mu \in \mathbb{R}^l, \qquad (1)$$

$$B_1 z(0) + P_1\mu + C_1 z(T) = d_1, \qquad d_1 \in \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

$$B_2 z(0) + P_2\mu + C_2 z(T) = d_2, \qquad d_2 \in \mathbb{R}^l, \qquad (3)$$

мұндағы $(n \times n)$ – өлшемді $\mathcal{A}(t)$, $(n \times l)$ – өлшемді $\mathcal{A}_0(t)$ матрицалары және n – өлшемді $f(t)$ вектор – функциясы $[0,\ T]$ аралығында үзіліссіз, $(n \times n)$ – өлшемді B_1, C_1 матрицалары, $(l \times n)$ – өлшемді B_2, C_2 матрицалары, $(n \times l)$ – өлшемді P_1 матрицасы және $(l \times l)$ – өлшемді P_2 матрицасы – тұрақты, $\|z\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |z_i|$, $\|z\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|z(t)\|$, $\|\mathcal{A}(t)\| \le \alpha$, $\|\mathcal{A}_0(t)\| \le \alpha_0$, α, α_0 – const.

(1)–(3) есебінің шешімі деп $t \in [0,T]$ аралығында $\mu = \mu^*$ мәндері үшін (1) дифференциалдық теңдеуін және (2), (3) шеттік шарттарын қанағаттандыратын $(z^*(t), \mu^*)$ жұбын айтамыз, мұндағы $z^*(t) \in C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$, μ^* – параметр.

Кіріспе

Параметрі бар дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер қолданбалы математиканың, физиканың, биологияның, медицинаның және т.б. салаларда қолданылады. Сонымен қатар мұндай есептер әртүрлі процестерді модельдеу үшін ғылым мен инженерияда кеңінен қолданылады.

Параметрі бар дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептерді шешуде тиімділеу әдістерін, ауытқу әдістерін, ақырлы айырымдық әдістерін, максимум қағидаты мен тағы басқа әдістерді қолдану көптеген ғалымдардың жұмыстарында [1–9] қарастырылған. Соған қарамастан, параметрі бар дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептердің бірмәнді шешілімділігін бастапқы берілімдер терминінде тағайындау және оның жуық шешімдерін табудың алгоритмдерін құру мәселелері ашық болып қалып отыр.

Параметрі бар шеттік есептерді зерттеу мен шешудің конструктивті әдістерінің бірі параметрлеу әдісі. Бұл әдіс Д.С. Жұмабаевтың [10] жұмысында жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептерді зерттеуге және шешуге арналып жасалған. Ары қарай параметрлеу әдісі дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі кластары үшін шеттік есептерді шешуде Д.С. Жұмабаевтың [11, 12] және оның оқушыларының жұмыстарында [13–22] орын алды.

Ұсынылып отырған жұмыста Жұмабаевтың параметрлеу әдісі негізінде (1)–(3) есебінің бірмәнді шешілімділігінің шарттары алынып, оның шешімін табудың алгоритмдері құрылады.

Материалдар мен әдістер

Параметрлеу әдісінің сүлбесін пайдаланып, $[0,T]$ аралығын келесі бөліктерге бөлейік:

$$[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh).$$

Ізделінді $z(t)$ функциясының бөлінген аралықтарға сығылуын $z_r(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N},$ деп белгілейік. $\lambda_r = z_r((r-1)h)$, $r = \overline{1,N}$, қосымша параметрлерін енгізіп және әрбір $[(r-1)h, rh), r = \overline{1,N}$, аралықтарында $u_r(t) = z_r(t) - \lambda_r, r = \overline{1,N}$, алмастыруларын жасасақ, онда келесі параметрлері бар пара-пар шеттік есебін аламыз:

$$\frac{du_r}{dt} = \mathcal{A}(t)(u_r(t) + \lambda_r) + \mathcal{A}_0(t)\mu + f(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \ r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

$$u_r((r-1)h) = 0, \qquad r = \overline{1,N}, \tag{5}$$

$$B_1\lambda_1 + P_1\mu + C_1\lambda_N + C_1 \lim_{t\to T-0} u_N(t) = d_1, \tag{6}$$

$$B_2\lambda_1 + P_2\mu + C_2\lambda_N + C_2 \lim_{t\to T-0} u_N(t) = d_2, \tag{7}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \qquad s = \overline{1,N-1}, \tag{8}$$

мұндағы (8) – шешімнің үзіліссіздік шарттары.

(4)–(8) есебінің шешімі деп $(\Lambda^*, u^*[t])$ жұбын айтамыз, мұндағы

$$\Lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^{nN+l},$$

$$u^*[t] = \big(u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)\big), \; u_r^*(t) \in C^1([(r-1)h, rh), \mathbb{R}^n), \; r = \overline{1, N}.$$

(1)–(3) және (4)–(8) есептері пара-пар есептер болады. Егер $(z^*(t), \mu^*)$ жұбы (1)–(3) есебінің шешімі болса, онда келесі $(\Lambda^*, u^*[t])$ жұбы, мұндағы

$$\Lambda^* = \big(z^*(0), z^*(h), \dots, z^*\big((N-1)h\big), \mu^*\big),$$

$$u^*[t] = \Big(z^*(t) - z^*(0), z^*(t) - z^*(h), \dots, z^*(t) - z^*\big((N-1)h\big)\Big)$$

(4)–(8) есебінің шешімі болады. Керісінше, егер $(\widehat{\Lambda}, \hat{u}[t])$ жұбы (4)–(8) есебінің шешімі болса, онда

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}_r + \hat{u}_r(t), \; t \in [(r-1)h, rh), \; r = \overline{1, N},$$

$$\hat{z}(T) = \hat{\lambda}_N + \lim_{t \to T-0} \hat{u}_N(t),$$

теңдіктерімен анықталатын $(\hat{z}(t), \hat{\mu})$ жұбы бастапқы (1)–(3) есебінің шешімі болады, мұнда $\hat{\mu}$ параметрі $\widehat{\Lambda}$ векторының соңғы компонентіне тең.

$\mu, \; \lambda_r, \; r = \overline{1, N}$, параметрлерінің бекітілген мәндерінде (4), (5) Коши есептері келесі интегралдық теңдеулерге пара-пар болады:

$$u_r(t) = \int_{(r-1)h}^{t} \mathcal{A}(\tau)(u_r(\tau) + \lambda_r)d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} \mathcal{A}_0(\tau)\mu d\tau + \int_{(r-1)h}^{t} f(\tau)d\tau, \; t \in [(r-1)h, rh), \; r = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Енді интегралдың астындағы $u_r(\tau), r = \overline{1, N}$, функцияларының орнына (9) теңдеуінің сәйкес оң жақтарын қойып, бұл үдерісті $\nu \; (\nu = 1, 2, \dots)$ рет қайталасақ, онда $u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, функцияларының келесі кейіптемелерін аламыз

$$u_r(t) = D_{\nu r}(t)\lambda_r + H_{\nu r}(t)\mu + G_{\nu r}(u, t) + F_{\nu r}(t), \tag{10}$$

мұндағы

$$D_{\nu r}(t) = \int_{(r-1)h}^{t} \mathcal{A}(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{t} \mathcal{A}(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} \mathcal{A}(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \int_{(r-1)h}^{t} \mathcal{A}(\tau_1) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} \mathcal{A}(\tau_{\nu-1}) \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} \mathcal{A}(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1,$$

$$M_{\nu r}(t) = \int_{(r-1)h}^{t} \mathcal{A}_0(\tau_1)d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{t} \mathcal{A}(\tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} \mathcal{A}_0(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots +$$

$$+\int_{(r-1)h}^{t}\mathcal{A}(\tau_1)\dots\int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\mathcal{A}(\tau_{\nu-1})\int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\mathcal{A}_0(\tau_\nu)d\tau_\nu\,d\tau_{\nu-1}\dots d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(t)=\int_{(r-1)h}^{t}f(\tau_1)d\tau_1+\int_{(r-1)h}^{t}\mathcal{A}(\tau_1)\int_{(r-1)h}^{\tau_1}f(\tau_2)d\tau_2\,d\tau_1+\dots+$$

$$+\int_{(r-1)h}^{t}\mathcal{A}(\tau_1)\dots\int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\mathcal{A}(\tau_{\nu-1})\int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu)d\tau_\nu\,d\tau_{\nu-1}\dots d\tau_1,$$

$$G_{\nu r}(u,t)=\int_{(r-1)h}^{t}\mathcal{A}(\tau_1)\dots\int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\mathcal{A}(\tau_{\nu-1})\int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\mathcal{A}(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu\,d\tau_{\nu-1}\dots d\tau_1.$$

(10) теңдеулерінен $\lim_{t\to rh-0} u_r(t)$, $r=\overline{1,N}$, шектерге сәйкес өрнектерді тауып, оларды (6)–(8) шарттарына қойып және (6), (7) өрнектерінің екі жағын да $h>0$ көбейтсек, $\mu,\ \lambda_r,\ r=\overline{1,N}$, параметрлер үшін келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Q_\nu(h)\Lambda=-F_\nu(h)-G_\nu(u,h),\quad \Lambda\in R^{nN+l}, \tag{11}$$

мұндағы

$$Q_\nu(h)=$$

$$\begin{vmatrix} hB_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & hC_1\big(I+D_{\nu N}(T)\big) & hP_1+hC_1M_{\nu N}(T) \\ hB_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & hC_2\big(I+D_{\nu N}(T)\big) & hP_2+hC_2M_{\nu N}(T) \\ I+D_{\nu 1}(h) & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 & M_{\nu 1}(h) \\ 0 & I+D_{\nu 2}(2h) & -I & \cdots & 0 & 0 & M_{\nu 2}(2h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I+D_{\nu,N-1}\big((N-1)h\big) & -I & M_{\nu,N-1}\big((N-1)h\big) \end{vmatrix}$$

$$F_\nu(h)=\Big(-hd_1+hC_1F_{\nu N}(T),\ -hd_2+hC_2F_{\nu N}(T),\ F_{\nu 1}(h),\dots,F_{\nu,N-1}\big((N-1)h\big)\Big),$$

$$G_\nu(u,h)=\Big(hC_1G_{\nu N}(u,T),\ hC_2G_{\nu N}(u,T),\ G_{\nu 1}(u,h),\dots,G_{\nu,N-1}(u,(N-1)h)\Big).$$

Сонымен белгісіз $\Lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\lambda_N,\mu)$, параметрлерін табу үшін (11) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін алдық, ал белгісіз $u[t]=\big(u_1(t),u_2(t),\dots,u_N(t)\big)$ функциясын (4), (5) Коши есебінен табамыз. Енді (4) – (8) есебінің шешімі төмендегі алгоритм арқылы анықталатын $(\Lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $k=0,1,2,\dots$ жұптар тізбегінің шегі ретінде ізделінеді.

0-ші қадам:

а) $Q_\nu(h)$ матрицасы қайтарымды деп жорамалдап, Λ параметрлерінің бастапқы жуықтауын $Q_\nu(h)\Lambda=-F_\nu(h)$ теңдеуінен табамыз, яғни $\Lambda^{(0)}=-[Q_\nu(h)]^{-1}F_\nu(h)$;

б) табылған $\Lambda^{(0)}$ қолданып және $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, аралықтарында $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$, $r=\overline{1,N}$, $\mu=\mu^{(0)}$ болғанда (4), (5) Коши есептерін шешіп $u^{(0)}[t]=$ $=\Big(u_1^{(0)}(t),\dots,u_N^{(0)}(t)\Big)$ функцияларын табамыз.

k-ші қадам:

а) Табылған $u^{(k-1)}[t] = \left(u_1^{(k-1)}(t), \dots, u_N^{(k-1)}(t)\right)$, $k = 1,2,\dots,$ функцияларын (11) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің оң жағына қойып,

$$Q_\nu(h)\Lambda = -F_\nu(h) - G_\nu\left(u^{(k-1)}, h\right)$$

теңдеуінен $\Lambda^{(k)} = \left(\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_N^{(k)}, \mu^{(k)}\right)$, $k = 1,2,\dots,$ параметрін табамыз;

б) $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$ аралықтарында $\lambda_r = \lambda_r^{(k)}, r = \overline{1,N}, \mu = \mu^{(k)}$,

$k = 1,2,\dots,$ болғанда (4), (5) Коши есебін шешіп $u^{(k)}[t] = \left(u_1^{(k)}(t), \dots, u_N^{(k)}(t)\right)$, $k = 1,2,\dots,$ функцияларын табамыз.

Сонымен $\left(\Lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$, $k = 0,1,2,\dots$ жұптар жүйесін аламыз.

Ұсынылып отырған алгоритмнің жүзеге асуы мен жалғыз шешімге жинақталуының жеткілікті шарттары және (4)–(8) параметрі бар шеттік есебінің бірмәнді шешілімді болатыны келесі теоремада келтірілген:

Теорема 1. Егер кез келген $\nu \in \mathbb{N}$, $h > 0$ үшін $Q_\nu(h)$ матрицасының кері матрицасы бар болса және

$$\|[Q_\nu(h)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(h),$$

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h)\max(1, h\|C_1\|, h\|C_2\|)\left\{e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!} + \right.$$
$$\left. + \alpha_0 h\left(e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\right)\right\} < 1,$$

онда (4)–(8) есебі бірмәнді шешілімді болады.

(1)–(3) және (4)–(8) есептері пара-пар болғандықтан келесі тұжырым орын алады.

Теорема 2. Егер кез келген $\nu \in \mathbb{N}$, $h > 0$ үшін $Q_\nu(h)$ матрицасы қайтарымды болса және жоғарыда келтірілген теореманың теңсіздіктері орындалса, онда (1)–(3) параметрі бар шеттік есебінің $(z^*(t), \mu^*)$ жалғыз шешімі болады және ол үшін келесі теңсіздік орынды:

$$\max(\|z^*\|_1, \|\mu^*\|) \le \mathcal{M}_\nu(h)\max(\|d_1\|, \|d_2\|, \|f\|),$$

$$\mathcal{M}_\nu(h) = \left\{\gamma_\nu(h)(1+\alpha_0 h)e^{\alpha h}\frac{\max(1, h\|C_1\|, h\|C_2\|)}{1-q_\nu(h)}\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + 1\right\} \times$$
$$\times\left\{\gamma_\nu(h)[e^{\alpha h} - 1 + \alpha_0 h e^{\alpha h}]\cdot max\left(1 + h\|C_1\|\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!},\right.\right.$$
$$\left.\left. 1 + h\|C_2\|\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\right) + e^{\alpha h}\right\}h +$$
$$+\gamma_\nu(h)\max\left(1 + h\|C_1\|\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!}, 1 + h\|C_2\|\sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\right)h.$$

1 және 2 теоремаларының дәлелдеуі [22] жұмысындағы теоремаларға ұқсас дәлелденеді.

Нәтижелер мен талқылау

$[0,\ 1]$ кесіндісінде параметрі бар дифференциалдық теңдеу үшін төмендегідей шеттік есепті қарастырайық

$$\frac{dz}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{t}{8}\\ \frac{t^2}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}z+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{t}{4}\\ -\frac{t}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix},\quad z\in\mathbb{R}^2,\qquad \mu\in\mathbb{R}^3, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}z(0)+\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}z(T)=\begin{pmatrix}d_{11}\\ d_{12}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -5\\ 6 & 7\end{pmatrix}z(0)+\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 0\\ -3 & 6 & 9\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}z(T)=\begin{pmatrix}d_{21}\\ d_{22}\\ d_{32}\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Параметрлеу әдісінің сүлбесін ескере отырып берілген $[0,1]$ аралығын келесідей бөліктерге бөлейік: $[0,1)=\cup_{r=1}^{2}[(r-1)h,rh)$, мұндағы $h=\frac{1}{2}$. Ізделінді функцияның бөлінген аралықтарға сығылуын $z_r(t)=z(t),t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,2}$, деп белгілеп, $\lambda_r=z_r((r-1)h)$, $r=\overline{1,2}$, қосымша параметрлерін енгізіп және әрбір $\lambda_r=z_r((r-1)h)$ $r=\overline{1,2}$, аралығында $u_r(t)=z_r(t)-\lambda_r$, $r=\overline{1,2}$, алмастыруларын жасайық. Соның нәтижесінде келесі параметрі бар шеттік есепті аламыз:

$$\frac{du_r}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{t}{8}\\ \frac{t^2}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}[u_r(t)+\lambda_r]+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{t}{4}\\ -\frac{t}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}, t\in\big((r-1)h,rh\big),$$

$$u_r\big((r-1)h\big)=0,\qquad r=\overline{1,2},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\lim_{t\to1-0}u_2(t)=\begin{pmatrix}d_{11}\\ d_{12}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -5\\ 6 & 7\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 0\\ -3 & 6 & 9\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\lambda_2+$$

$$+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\lim_{t\to1-0}u_2(t)=\begin{pmatrix}d_{21}\\ d_{22}\\ d_{32}\end{pmatrix},$$

$$\lambda_1+\lim_{t\to\frac{1}{2}-0}u_1(t)=\lambda_2$$

$\nu = 2$ болғанда $Q_2\left(\frac{1}{2}\right)$ матрицасы келесі түрде болады:

$$Q_2\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5287 & -0.4524 & 0.7166 & 1.079 & 1.9883 \\ 2.5 & 3 & 1.1359 & 0.099 & 2.7568 & 2.9913 & 0.1055 \\ 0.5 & 1.5 & 1.1359 & 0.099 & 1.2568 & 1.4913 & 2.1055 \\ 0 & -2.5 & 0.6072 & 0.5514 & 3.0402 & 3.4123 & 0.1171 \\ 3 & 3.5 & -0.5287 & 0.4524 & -1.7166 & 2.921 & 4.5117 \\ 1.1329 & 0.0326 & -1 & 0 & 0.2646 & -0.0035 & 0.0352 \\ 0.0114 & 1.0002 & 0 & -1 & -0.0605 & -0.1667 & 0.1252 \end{pmatrix}$$

Теореманың шарттарының орындалуын тексерейік:

$$\left\| \left[Q_2\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \right\| \leq 12.0884,$$

$$q_2\left(\frac{1}{2}\right) = 12.0884 \cdot \left[e^{\frac{1}{4}} - 1 - \frac{1}{4} - \frac{(1/4)^2}{2} + 1.0833 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{4}} - 1 - \frac{1}{4}\right)\right] = 0.2563 < 1.$$

Теореманың барлық шарттары орындалып тұр, олай болса берілген (12)–(14) параметрі бар шеттік есептің жалғыз шешімі болады.

Қорытынды

Ұсынылып отырған жұмыста параметрі бар дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық шеттік есеп Жұмабаевтың параметрлеу әдісі негізінде зерттелген. Бастапқы берілімдер терминінде оның бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары алынған.

Қаржыландыру туралы ақпарат. Бұл зерттеулерді жүзеге асыруда Қазақстан Республикасы Ғылым және Жоғары Білім министрлігінің Ғылым комитеті қолдау көрсетті (Грант BR20281002).

ӘДЕБИЕТТЕР

1 Ronto M., Samoilenko A.M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems // World Scientific. – River Edge, NJ, USA, 2000. – 468 p.

2 Hartman Ph. Ordinary Differential Equations. – Join Wiley and Sons, New York, 1964.

3 Кибенко А.В., Перов А.И. Некоторые теоремы существования для двухточечной краевой задачи с параметром // Труды семинара по функциональному анализу. – 1963. – № 7. – С. 52–58.

4 Гома И.А. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром // Укр. матем. журн. – 1977. – Т. 29. – № 6. – С. 800–807.

5 Эйдельман Ю.С. Краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Диф. уравн. – 1978. – Т. 14. – № 7. – С. 1335–1337.

6 Kurpel N.S., Marusyak A.G. On a multipoint boundary-value problem for a differential equation with parameters // Ukrainian Math J. – 1980. – No. 2. – P. 223–226.

7 He T., Yang F., Chen C. and Peng S. Existence and multiplicity of positive solutions for nonlinear boundary value problems with a parameter // Comput Math Appl. – 2011. – No. 61. – P. 3355–3363.

8 Feng X., Niu P., Guo Q. Multiple solutions of some boundary value problems with parameters // Nonlinear Anal: Theo, Meth Appl. – 2015. – No. 74. – P. 1119–1131.

9 Jankowski T., Kwapisz M. One the existence and uniqueness of solutions of boundary value problem for differential equations with parameters // Math Nachr. –1976. – No. 71. – P. 237–247.

10 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1989. – Vol. 29. – No. 1. – P. 34–46.

11 Dzhumabaev D.S., Bakirova E. A., Kadirbayeva Zh. M. An algorithm for solving a control problem for a differential equation with a parameter // News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. – 2018. – Vol. 5. – No. 321. – P. 25–32.

12 Bakirova E.A., Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2020. – Vol. 43. – P. 1788–1802. https://doi.org/10.1002/mma.6003.

13 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter // News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. –2019. – Vol. 3. – No. 325. – P. 77–84.

14 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type // News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. – 2019. – Vol. 6. – No. 328. – P. 14–24.

15 Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. A problem with parameter for the integro-differential equations // Mathematical Modelling and Analysis. – 2021. – Vol. 26. – No. 1. – P. 34–54. https://doi.org/10.3846/mma. 2021.11977.

16 Assanova A.T., Bakirova E.A., Vassilina G.K. Well-posedness of problem with parameter for an integro-differential equations // Analysis. – 2020. – Vol. 4. – No. 40. – P. 175–191. https://doi.org/10.1515/anly-2019-0021.

17 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh. M., Uteshova, R.E. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations // Computational and Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 39. – No. 248. https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298.

18 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution to a control problem for integro-differential equations // Computational mathematics and mathematical physics. – 2020. – Vol. 60. – No. 2. – P. 203–221. https://doi.org/10.1134/S0965542520020049.

19 Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S., Kabdrakhova S.S. On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem // Lobachevskii journal of mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 3. – P. 606–612. https://doi.org/10.1134/S1995080221030173

20 Бакирова Э.А., Искакова Н.Б., Уаисов Б. Об одном алгоритме решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с параметром // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2017. – № 3. – С. 173–180.

21 Искакова Н.Б., Кубанычбеккызы Ж. Об одном алгоритме решения линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром // Вестник КазНПУ им. Абая. Сер. физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 2. – № 70. – С. 64–69.

22 Минглибаева Б.Б. Коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейных двухточечных краевых задач с параметром // Математический журнал. – 2003. – Т. 3. – № 2. – С. 55–62.

REFERENCES

1 Ronto M., Samoilenko A.M. (2000) Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. USA: World Scientific, River Edge, NJ, 468 p.

2 Hartman Ph. (1964) Ordinary Differential Equations. New York: Join Wiley and Sons.

3 Kibenko A.V., Perov A.I. (1963) Nekotorye teoremy sushhestvovanija dlja dvuhtochechnoj kraevoj zadachi s parametrom. Trudy seminara po funkcional'nomu analizu, no. 7, pp. 52–58 [in Russian].

4 Goma I.A. (1977) Metod posledovatel'nyh priblizhenij v dvuhtochechnoj kraevoj zadache s parametrom. Ukr. matem. zhurn, vol. 29, no. 6, pp. 800–807 [in Russian].

5 Jejdel'man Ju.S. (1978) Kraevaja zadacha dlja differencial'nogo uravnenija s parametrom. Dif.uravn, vol. 14, no. 7, pp. 1335–1337 [in Russian].

6 Kurpel N.S, Marusyak A.G. (1980) On a multipoint boundary-value problem for a differential equation with parameters. Ukrainian Math J., no. 2, pp. 223–226.

7 He T., Yang F., Chen C., Peng S. (2011) Existence and multiplicity of positive solutions for nonlinear boundary value problems with a parameter. Comput Math Appl, no. 61, pp. 3355–3363.

8 Feng X., Niu P., Guo Q. (2015) Multiple solutions of some boundary value problems with parameters. Nonlinear Anal: Theo, Meth Appl, no. 74, pp. 1119–1131.

9 Jankowski T., Kwapisz M. (1976) One the existence and uniqueness of solutions of boundary value problem for differential equations with parameters. Math Nachr, no. 71, pp. 237–247.

10 Dzhumabayev D.S. (1989) Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 29, no 1, pp. 34–46.

11 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. and Kadirbayeva Zh.M. (2018) An algorithm for solving a control problem for a differential equation with a parameter. News of the NAS RK. Phys., Math. Series, vol.5, no. 321, pp. 25–32.

12 Bakirova E.A., Dzhumabaev D.S. and Mynbayeva S.T. (2020) A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation. Mathematical Methods in the Applied Sciences, no. 43, pp. 1788–1802. https://doi.org/10.1002/mma.6003.

13 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Kadirbayeva Zh.M. (2019) Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter. News of the NAS RK. Phys.-Math. Series, vol. 3, no. 325, pp. 77–84.

14 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Kadirbayeva Zh.M. (2019) Numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type. News of the NAS RK. Phys.-Math. Series, vol. 6, no. 328, pp. 14–24.

15 Bakirova E.A., Assanova A.T. and Kadirbayeva Zh.M. (2021) A problem with parameter for the integro-differential equations, Mathematical Modelling and Analysis, vol. 26, no.1, pp. 34–54. https://doi.org/10.3846/mma. 2021.11977.

16 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Vassilina G.K. (2020) Well-posedness of problem with parameter for an integro-differential equations. Analysis, vol. 4, no. 40, pp. 175–191. https://doi.org/10.1515/anly-2019-0021.

17 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. and Uteshova R.E. (2020) A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations. Computational and Applied Mathematics, vol. 39, no. 248. https://doi.org/10.1007/s40314-020-01298.

18 Assanova A.T., Bakirova E.A. and Kadirbayeva Zh.M. (2020) Numerical solution to a control problem for integro-differential equations. Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 60, no. 2, pp. 203–221. https://doi.org/10.1134/S0965542520020049.

19 Temesheva S.M., Dzhumabaev D.S., Kabdrakhova S.S. (2021) On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem. Lobachevskii journal of mathematics, vol. 42, no. 3, pp. 606–612. https://doi.org/10.1134/S1995080221030173.

20 Bakirova Je.A., Iskakova N.B., Uaisov B. (2017) Ob odnom algoritme reshenija linejnoj kraevoj zadachi dlja integro-differencial'nogo uravnenija Fredgol'ma s parametrom. Izvestija NAN RK, Ser.fiz.-mat., no.3, pp. 173–180 [in Russian].

21 Iskakova N.B., Kubanychbekkyzy Zh. (2020) Ob odnom algoritme reshenija linejnoj kraevoj zadachi dlja obyknovennogo differencial'nogo uravnenija s parametrom. Vestnik KazNPU im. Abaja, Ser. fiz.-mat. nauki, vol. 2, no. 70, pp. 64–69 [in Russian].

22 Minglibaeva B.B. (2003) Kojefficientnye priznaki odnoznachnoj razreshimosti linejnyh dvuhtochechnyh kraevyh zadach s parametrom. Matematicheskij zhurnal, vol. 3, no. 2, pp. 55–62 [in Russian].

[1,2]Bakirova E.A.,
Can. Phys.-Math.Sc., ORCID ID: 0000-0002-3820-5373, e-mail: bakirova1974@mail.ru
[1]Iskakova N.B.,
Can. Phys.-Math.Sc., ORCID ID: 0000-0002-0680-4099, e-mail: narkesh@mail.ru
[1,3]Temesheva S.M.,
Dr. Phys.-Math.Sc., ORCID ID: 0000-0002-3341-4539, e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com
[1,4]*Kadirbayeva Zh.M.,
Can. Phys.-Math.Sc., ORCID ID: 0000-0001-8861-4100, *e-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan
[3]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[4]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARAMETER

Abstract

A linear boundary value problem for a differential equation with a parameter is investigated on a finite interval by the parameterization method. The studied boundary value problem with parameter is reduced to an equivalent multipoint boundary value problem with parameters by splitting the interval, introducing additional parameters at the points of splitting and new functions. The obtained equivalent boundary value problem contains Cauchy problems for ordinary differential equations with respect to new functions. By substituting the solution representation of the Cauchy problem into the boundary conditions and continuity conditions of the solution, a system of linear algebraic equations with respect to the introduced parameters is compiled. An algorithm for finding a solution to the boundary value problem with parameters is constructed. The formulation of the theorem on sufficient conditions of unique solvability of the boundary value problem with parameters is given. Sufficient conditions of its unique solvability are obtained in terms of the data of the original boundary value problem. An example showing the fulfillment of the conditions of the theorem is given.

Key words: differential equation with parameter, boundary value problem, solvability, parameterization method.

[1,2]Бакирова Э.А.,
к.ф-м.н., ORCID ID: 0000-0002-3820-5373, e-mail: bakirova1974@mail.ru
[1]Искакова Н.Б.,
к.ф-м.н., ORCID ID: 0000-0002-0680-4099, e-mail: narkesh@mail.ru
[1,3]Темешева С.М.,
д. ф.-м. н., ORCID ID: 0000-0002-3341-4539, e-mail: temeshevasvetlana@gmail.com
[1,4]*Кадирбаева Ж.М.,
к.ф-м.н., ORCID ID: 0000-0001-8861-4100, E-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

[1]Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан
[3]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
[4]Международный университет информационных технологий, г. Алматы, Казахстан

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Аннотация

На конечном интервале методом параметризации исследуется линейная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром. Путем разбиения интервала, введения дополнительных параметров в точках разбиения и новых функций исследуемая краевая задача с параметром сводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами. Полученная эквивалентная краевая задача содержит задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых функций. С помощью подстановки представления решения задачи Коши в краевые условия и условия непрерывности решения составляется система линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Построен алгоритм нахождения решения краевой задачи с параметрами. Приведена формулировка теоремы о достаточных условиях однозначной разрешимости краевой задачи с параметрами. В терминах данных исходной краевой задачи получены достаточные условия ее однозначной разрешимости. Приводится пример, показывающий выполнение условий теорем.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с параметром, краевая задача, разрешимость, метод параметризации.